

**RIEŠENIE NELINEÁRNYCH PEVNOSTNÝCH ÚLOH
POMOCOU MKP**

ŠTEFAN BENČA

RIEŠENIE NELINEÁRNYCH PEVNOSTNÝCH ÚLOH POMOCOU MKP

ŠTEFAN BENČA

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2009

Monografia obsahuje základnú teóriu metódy konečných prvkov na riešenie geometricky a fyzikálne nelineárnych pevnostných úloh. Pre tieto úlohy zároveň poskytuje podrobné postupy konkrétneho numerického riešenia v prostredí programov Mathematica, Matlab, ANSYS a vlastného fortranovského programu NELMKP, ktorý je v práci uvedený v zdrojovom tvare. Teória a výpočtové postupy MKP pri riešení takýchto úloh sa demonštrujú na geometricky jednoduchých telesách s množstvom príkladov ilustrujúcich numerické spracovanie a využitie teoretických formulácií.

Práca sa pokúša vyplniť medzeru existujúcu medzi teoretickými monografiami určenými predovšetkým pre tvorcov programov MKP a výskumných pracovníkov v tejto oblasti a fyzikálne i teoreticky nekompletnými užívateľskými príručkami, ktoré sprevádzajú jednotlivé komerčné programy MKP. Môže byť tiež vhodným doplnkom základných učebníc MKP, ktoré sa väčšinou venujú len lineárnym úlohám, resp. nelineárne úlohy analyzujú len teoreticky, bez numerického programového spracovania, a teda bez názornej a motivujúcej demonštrácie využitia nelineárnej teórie.

Lektori: Prof. Dr.-Ing. Vladimír Kompiš, CSc.
Prof. Ing. Justín Murín, DrSc.
Doc. Ing. Pavel Élesztős, CSc.

OBSAH

Zoznam hlavných symbolov	7
Ú v o d	9
1 Základné zdroje pevnostnej nelinearity	11
1.1 Geometrická nelinearita	11
1.2 Fyzikálna nelinearita	17
1.3 Nelinearita vyvolaná okrajovými podmienkami	18
2 Numerické (iteračné) riešenie nelineárnych rovníc	20
Príklad – Jedna rovnica	22
Príklad – Sústava troch rovníc	26
3 Program ANSYS – základné údaje	28
Príklad – Nelineárny prút	33
Kritériá konvergenzie	35
4 Úloha s dvoma neznámymi	38
Príklad – Prút s dvoma neznámymi (ANSYS, Mathematica)	41
5 Využitie energetických princípov na zostavenie rovníc rovnováhy	44
6 Jednorozmerné mierky pretvorenia	47
7 Rovinný prútový prvok pre veľké posunutia a rotácie	53
Príklad – Rotácia prúta o 90° (Mathematica)	56
Príklad – Prút s Greenovou mierkou deformácie (Mathematica)	57
Príklad – Prút s inžinierskou mierkou deformácie (Mathematica)	57
8 Rovnice rovnováhy telesa – výsledná sústava rovníc	60
Príklad – Nelineárna prútová sústava (Mathematica)	61
Príklad – Nelineárna prútová sústava (NELMKP)	65
Príklad – Nelineárna prútová sústava (ANSYS)	67
9 Rovinný nosníkový prvok pre veľké posunutia a rotácie	69
Príklad – Lomený nosník (Mathematica)	72
Príklad – Lomený nosník (NELMKP)	77
Príklad – Lomený nosník (ANSYS)	79
10 Napät'ové spevňovanie a strata stability	81
Príklad – Predpätý nosník + Nosník s tuhými votknutiami (ANSYS)	83
Príklad – Prstenec (linearizovaný výpočet straty stability) – ANSYS	88
Príklad – Nosníkový oblúk (nelineárny výpočet straty stability) – ANSYS	90
11 Spojité teleso – teoretické minimum	93
12 Lagrangeovská formulácia geometricky nelineárneho prvku rovinnej napätosti	101
Príklad – Ohyb dlhej steny s veľkými rotáciami a posunutiami (analytické lineárne riešenie)	106
Príklad – Ohyb dlhej steny s veľkými rotáciami a posunutiami (NELMKP)	107
Príklad – Ohyb dlhej steny s veľkými rotáciami a posunutiami (ANSYS)	109

13 Jednoosové charakteristiky kovového materiálu	112
14 Kritériá (podmienky) plastickej deformácie	115
15 Klasické modely pružne-plastickej deformácie materiálu	125
<i>Ideálne plastický materiál</i>	126
<i>Materiál s izotropným spevňovaním</i>	127
<i>Kinematické spevňovanie materiálu</i>	130
<i>Využitie rozkladu fyzikálnych rovníc na objemovú a deviatorickú časť</i>	133
<i>Redukcia deväťčlenných vektorov napätia a deformácie</i>	134
16 Integrovanie fyzikálnych rovníc	136
<i>Metóda radiálneho návratu na plochu plasticity</i>	137
<i>Metóda rozdelenia operátorov</i>	141
<i>Všeobecná metóda spätnej integrácie + Príklad (MATLAB, ANSYS)</i>	141
17 Explicitné fyzikálne vzťahy rovinnej napätosti	148
<i>Príklad – Využitie explicitných vzťahov (Mathematica)</i>	149
<i>Príklad – Kontrola explicitných vzťahov (ANSYS)</i>	151
<i>Príklad – Využitie explicitných vzťahov (NELMKP)</i>	153
18 Konzistentný materiálový modul	157
<i>Príklad – Využitie modulu v programe NELMKP</i>	159
<i>Príklad – Kontrola využitia modulu pomocou programu ANSYS</i>	161
19 Program NELMKP	164
19.1 Stručná charakteristika	164
19.2 Zadávanie vstupných údajov pre program	164
<i>Príklad – Zadávanie vstupných údajov pre lomený nosník</i>	168
20 PRÍLOHA – Zdrojová verzia programu NELMKP	171
Literatúra	202
Index	204

ZOZNAM HLAVNÝCH SYMBOLOV

Indexy

e	všeobecný, ľubovoľný, e-tý prvok hodnota (veličina) patriaca e-tému prvku elastická hodnota
0	začiatočná (referenčná) hodnota skúšobná hodnota napätia
p	plastická hodnota
G	veličiny vyvolané Greenovou deformáciou
X, Y, XY	veličina vzťahovaná na začiatočnú konfiguráciu telesa
x, y, xy	veličina vzťahovaná na aktuálnu konfiguráciu telesa
K	hodnota na medzi sklzu materiálu
n	hodnota na začiatku zaťažujúceho kroku
$n+1$	hodnota na konci zaťažujúceho kroku
$i, j, k, \dots$	lokálne číslovanie uzlov prvku
T	tangenciálna veličina

Označenie symbolov

$\tilde{\square}, \delta \square$	virtuálna hodnota, virtuálna zmena veličiny $\square$
$\bar{\square}$	ekvivalentná hodnota veličina závislá od stupňa plastizácie veličina vyjadrená v lokálnom súradnicovom systéme prvku
$\underline{\square}$	kompletný vektor, resp. matica tenzora (obsahujú aj symetrické členy)
$[\square]$	maticový zápis tenzora
$\square'$	tenzor

Latinské a grécke symboly

E	modul pružnosti v ťahu materiálu
G	modul pružnosti v šmyku materiálu
l_0, l	začiatočná a koncová dĺžka zaťaženého prúta, resp. nosníka
$\Delta l = l - l_0$	predĺženie prúta, resp. nosníka
u, v, w	zložky vektora posunutia $\tilde{\mathbf{u}}$
A	energia napätosti (deformačná práca vnútorných síl)
W	potenciálna energia vonkajších síl
Π	celková potenciálna energia
X, Y, Z	súradnice bodu v začiatočnej konfigurácii telesa
x, y, z	súradnice bodu v aktuálnej konfigurácii telesa
N_i	interpolačná (tvarová) funkcia prvku
f	funkcia plastického zaťažovania podmienka plasticity
σ_K	medza sklzu materiálu
$\bar{\sigma}$	ekvivalentné napätie
$\bar{\varepsilon}_p$	ekvivalentná plastická deformácia
E_T	tangenciálny modul materiálu

H	plastický modul materiálu
μ	Poissonovo číslo materiálu
ξ, η, ς	prirodzené súradnice prvku
λ	pomerné natiahnutie (stretch) l/l_0
$d\lambda$	plastický násobok
ρ	hustota materiálu

MATICE

$\mathbf{u}_e, \mathbf{u}$	vektor (stĺpcová matica) posunutí uzlových bodov prvku, telesa
$\tilde{\mathbf{u}}$	vektor posunutí všeobecného bodu telesa
$\mathbf{q}_e, \mathbf{q}$	vektor vnútorných uzlových síl prvku, telesa
$\mathbf{r}$	vektor nerovnovážnych uzlových síl
$\mathbf{f}$	vektor vonkajších uzlových síl
$\mathbf{K}_T^e, \mathbf{K}_T$	tangenciálna matica tuhosti prvku, telesa
$\mathbf{K}_T^M$	tangenciálna matica materiálovej tuhosti
$\mathbf{K}_T^G$	tangenciálna matica geometrickej tuhosti
$\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{F}$	vektor objemových, plošných, sústredených síl
$\mathbf{b}_e$	pomocný vektor e-tého prvku
$\mathbf{B}$	transformačná matica deformácií prvku
$\mathbf{D}_e, \mathbf{D}$	matica materiálových (materiálovo-prierezových) vlastností prvku, telesa
$\mathbf{X}$	vektor polohy bodu v začiatočnej (referenčnej) konfigurácii telesa
$\mathbf{x}$	vektor polohy bodu v aktuálnej konfigurácii telesa
$\mathbf{F}$	matica deformačného gradientu
$\mathbf{I}$	jednotková matica
$\mathbf{N}, \mathbf{n}$	jednotkový vektor
$\mathbf{U}$	matica natiahnutia
$\mathbf{R}$	matica rotácie
$\mathbf{E}$	Green-Lagrangeov vektor deformácie
$\underline{\mathbf{f}}$	kompletný vektor derivácií funkcie plasticity podľa zložiek napätia
$\boldsymbol{\sigma}, \underline{\mathbf{s}}, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots$	redukovaný vektor (bez symetrických členov) napätia, deviatora napätia, deformácie atď.
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{s}}, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots$	kompletný vektor (aj so symetrickými členmi) napätia, deviatora napätia, deformácie atď.
$\boldsymbol{\alpha}$	napäťový vektor posunutého súradnicového začiatku plochy plasticity
β	deviátor $\boldsymbol{\alpha}$
σ_0	skúšobné napätie

Ú V O D

Cieľom predkladanej monografie je poskytnúť záujemcovi základnú teóriu a základné aplikačné postupy metódy konečných prvkov (MKP) používané pri riešení geometricky a fyzikálne nelineárnych pevnostných úloh. Pod záujemcom sa predpokladá čitateľ oboznámený so základnou lineárnou teóriou MKP, alebo pracovník, ktorý využíva komerčný program MKP na riešenie lineárnych i nelineárnych úloh a nestačí mu, alebo nevyhovuje, teoretický manuál programu. V neposlednom rade by práca mohla byť zaujímavá aj pre študentov a doktorandov fakúlt technických univerzít zameraných na aplikovanú mechaniku a mechatniku.

Pôvodne sme prácu rozdelili na tri časti: úvodná časť obsahovala základné pojmy a vzťahy, ďalšia geometricky nelineárne a posledná fyzikálne nelineárne prvky. Toto delenie sa však neosvedčilo vzhľadom na prelínanie sa základnej teórie, vzťahov a postupov v týchto častiach. Práca je preto členená na krátke kapitoly, ktoré na seba nadväzujú a sú radené tak, aby bolo možné predkladanú teóriu postupne budovať, hneď aplikovať na jednoduché úlohy z danej problematiky a tým zavčas vyvrátiť pochybnosti čitateľa o potrebnosti teoretických rozborov a vzťahov. Na vysvetľovacie a aplikačné príklady sa využívajú programy *Mathematica*, *Matlab* a *ANSYS*, ktoré by mali byť pre horeuvedený okruh predpokladaných záujemcov známe a prístupné. V práci sa využíva aj vlastný fortranovský program NELMKP, ktorý je uvedený v zdrojovom tvare a je vhodný aj pre jednoduché zabudovanie vlastných formulácií a numerických postupov i ďalších nelineárnych konečných prvkov.

Pomocou MKP možno riešiť rôzne typy nelineárnych úloh, práca sa však, hlavne z dôvodu obmedzeného rozsahu, venuje len statickým, geometricky a fyzikálne nelineárnym pevnostným úlohám, ktoré však tvoria základ aj pre pochopenie postupov riešenia ďalších typov nelineárnych úloh mechaniky a fyziky: z oblasti kontaktu telies, vedenia tepla, akustiky, elektromagnetického poľa, zviazaných úloh mechanického poľa s poliami iného druhu a ďalších. Treba povedať, že z klasického postupu a spracovania v MKP sa čiastočne vymykajú dôležité nelineárne úlohy prúdenia tekutín.

Kvôli jednoduchosti sa pri jednoosových úlohách často využíva Greenova formulácia deformácie (pretvorenia) a pri dvojsoových geometricky nelineárnych úlohách jednoducho využiteľný Green-Lagrangeov tenzor deformácie a s ním zviazaný 2. Piola-Kirchhoffov tenzor napätia. Pri týchto úlohách sa uvažujú veľké posunutia a rotácie, ale malé deformácie. Stručne sa však vysvetľuje aj prechod na formuláciu s veľkými deformáciami s logaritmickou mierkou deformácie. Geometricky nelineárna formulácia rovinného nosníka s odvodenou tangenciálnou maticou tuhosti prvku umožňuje elegantne vysvetliť a numericky demonštrovať pojmy osového predpätia, napäťového spevňovania a straty stability pri tlakovom zaťažení.

Pri fyzikálne nelineárnych (pružne-plastických) problémoch sa predpokladajú malé posunutia i malé deformácie. Pre teleso zaťažované rovinnou napätosťou sa uvažuje von Misesova funkcia plastického zaťažovania pre ideálne plastický materiál, ako aj pre materiál s izotropným a kinematickým spevňovaním. Podrobne sa analyzujú efektívne spôsoby integrovania konštitutívnych rovníc s uvedením konkrétnych numerických algoritmov a ich zabudovaním do demonštračných programov v *Mathematice* i *Matlabe* a do fortranovského programu NELMKP. Vysvetľuje sa odvodenie materiálového modulu konzistentného s metódou integrácie a názorne sa ukazuje jeho výhodnosť spojená so zaručením kvadratickej konvergenzie iteračnej procedúry.

Formulácia nelineárnej úlohy pomocou MKP vedie na sústavu nelineárnych rovníc, ktorých neznámymi sú zovšeobecnené posunutia (premiestnenia) uzlových bodov výpočtového modelu telesa. Matica sústavy (pri pevnostných úlohách tzv. tangenciálna matica tuhosti) je funkciou týchto neznámych, čo automaticky vyžaduje iteračný spôsob riešenia úlohy. Existuje veľké množstvo numerických procedúr na výpočet neznámych z takejto sústavy rovníc, ktoré však skoro všetky vychádzajú z princípu Newton-Raphsonovej, často stručne označovanej aj len Newtonovej, iteračnej metódy. V práci sa preto tejto metóde a hlavne jej spôsobu využitia pre riešenie nelineárnych pevnostných úloh (jej princíp by mal byť známy z numerickej matematiky) venuje značná pozornosť; všetky demonštračné príklady sa riešia touto metódou, je zabudovaná aj do programu NELMKP a využíva ju aj program ANSYS, kde je možné zvoliť si aj jej niektoré modifikácie. Pravda, aj zaťažujúce sily môžu byť zviazané so zovšeobecnými posunutiami (pri rotácii telesa sa napr. mení smer normálových povrchových síl), tento prípad sme kvôli jednoduchosti formulácií neuvažovali, všetky sily v práci sú konzervatívne – ich smer je počas zaťažovania (počas iteračnej procedúry) rovnaký.

Práca si nezakladá na hlboko teoretickom texte a komplexnom rozbere teoretických problémov, skôr sa snaží o stručnosť a jasnosť výkladu avšak bez zjednodušovania toho, čo by sa zjednodušovať nemalo. Takisto necitujeme kompletne pôvodných autorov teoretických a algoritmických formulácií a postupov; možno ich nájsť v základných súhrnnych publikáciách o nelineárnych problémoch MKP, za ktoré považujeme predovšetkým práce [1] až [8]. Nepovažujeme sa tiež za kompetentných na zhrnutie, hodnotenie a kompletne citovanie doterajších príspevkov slovenských autorov do tejto problematiky; táto práca ani nemá takýto cieľ a zameranie. Spomeňme však aspoň významný prínos teoretických prác J. Brillu, V. Kompiša, J. Murína, J. a V. Sládeka s pozoruhodným ohlasom v medzinárodnej odbornej komunite. Cenný prehľad o problematike nelineárnych úloh možno nájsť v práci [9].

1 Základné zdroje pevnostnej nelinearity

Pri inžinierskych pevnostných analýzach poddajných telies sa väčšinou stretávame s lineárnymi úlohami, pri ktorých sa predpokladá, že medzi vstupnými a výstupnými veličinami úlohy platí lineárny vzťah. Pod vstupnými veličinami treba rozumieť silové a deformačné okrajové podmienky, ktoré spolu s objemovými silami predstavujú zaťaženie telesa. Výstupnými veličinami sú hľadané hodnoty posunutí, pretvorení a napätí telesa. Linearizácia úlohy je samozrejme určitá aproximácia, pretože reálna deformácia telesa vždy prináša do vzťahu vstupných a výstupných veličín nelineárne zložky; ich vplyv však pri mnohých úlohách je za určitých podmienok zanedbateľne malý a linearizácia je nielen prípustná, ale aj výhodná, pretože lineárna úloha sa rieši podstatne jednoduchšie ako nelineárna.

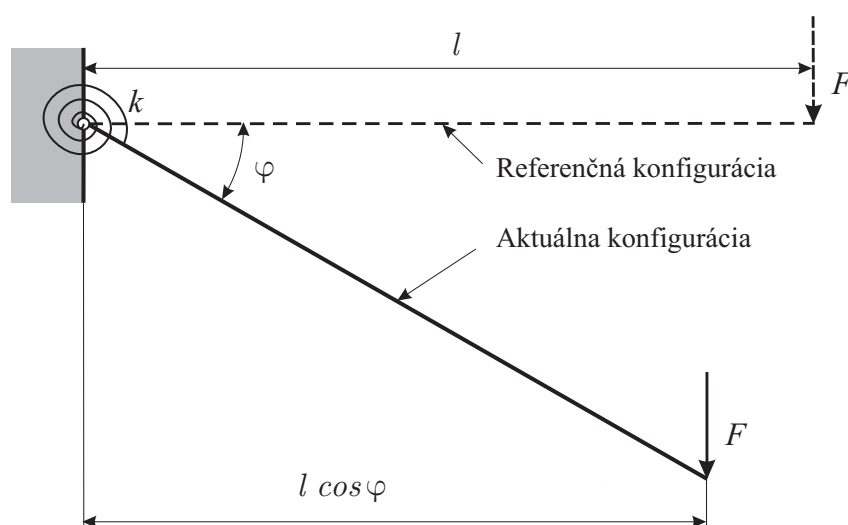
Pozrime sa teraz na skupiny úloh, pri ktorých sa lineárnosť porušuje a všimnime si hlavne príčinu, ktorá nelineárnosť vyvolala. Využijeme na to niekoľko jednoduchých príkladov, ktoré nám poslúžia ako pomôcka pri klasifikácii nelineárnych úloh i pri vysvetlení niektorých základných pojmov z tejto oblasti. Príklady sú zámerne tak zjednodušené, aby ich bolo možné analyticky riešiť a aby tak boli schopné názorne reprezentovať príslušnú formu nelinearity.

1.1 Geometrická nelinearita

Na obr. 1.1 sme znázornili rovnovážnu polohu tuhého nehmotného nosníka zaťaženého silou F . Rotácii nosníka v otočnom kĺbe bráni pružina s rotačnou tuhosťou k . Momentová podmienka rovnováhy k otočnému bodu

$$Fl \cos \varphi = k\varphi \quad (1.1)$$

ukazuje, že medzi zaťažujúcou silou a uhlom rotácie nosníka je nelineárny vzťah, spôsobený veľkou zmenou geometrie nosníka pri zaťažovaní. Takáto forma nelinearity sa preto často nazýva *geometrickou nelinearitou*. Pri malom uhle natočenia nosníka $\cos \varphi \approx 1$ a z dostaneme lineárnu závislosť $F = k\varphi / l$. Kvôli porovnaniu sme obe závislosti znázornili v obr. 1.2. Z obrázku vyplýva, že pre malé uhly je lineárny predpoklad oprávnený, ale pri väčších uhloch neprípustný. Všimnime si tiež, že sme predpokladali nemenný smer sily počas zaťažovania. Takáto sila patrí do kategórie tzv. *konzervatívnych síl*.



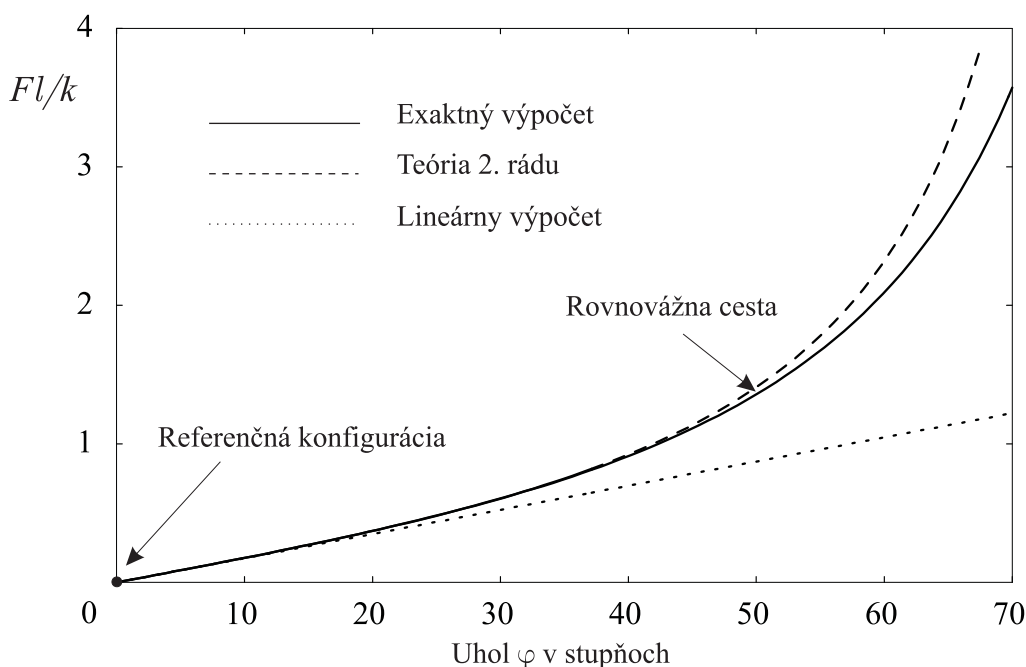
Obrázok 1.1 Tuhý nosník s veľkou rotáciou a posunutím

Často sa na riešenie nelineárnych úloh využívajú tzv. *teórie druhého rádu*. Pri takomto postupe sa nelineárne funkcie rozvinú do radu, z ktorého sa potom pri riešení použijú len prvé dva členy. V uvedenom príklade môžeme využiť aproximáciu $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ na približné riešenie úlohy. Dostávame vzťah

$$F = \frac{k\varphi}{l(1 - \frac{\varphi^2}{2})} \quad (1.2)$$

V obr. 1.2 vidieť, že takéto riešenie do určitého uhla poskytuje vyhovujúce výsledky, pri vysokom stupni nelinearity sa však tiež môže výrazne líšiť od presného riešenia.

Pomocou analogických obrázkov ako je obr. 1.2 sa často charakterizujú nelineárne pevnostné úlohy. To znamená, že sa na telese vytypuje bod a nakreslí sa závislosť jeho zovšeobecneného posunutia (posunutie, resp. natočenie) od veličiny charakterizujúcej zmenu zaťaženia – čím dostaneme tzv. *rovnovážnu cestu* v zaťažovacom diagrame úlohy. S významnými bodmi rovnovážnej cesty sa v ďalšom texte ešte stretneme, v obr. 1.2 sme vyznačili bod *referenčnej konfigurácie* telesa, ktorou často býva stav, keď teleso nie je zaťažené.

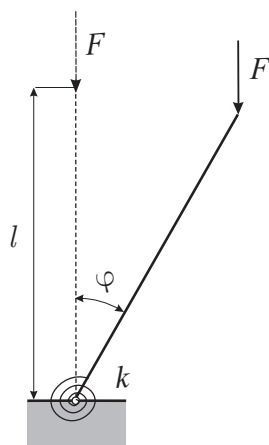


Obrázok 1.2 Závislosť uhla natočenia nosníka na zaťažujúcej sile

Podobne ako tuhý nosník s pružinou by sa z hľadiska závislosti zaťažujúcej sily a posunutí jeho bodov choval pri veľkých posunutíach a rotáciách aj pružný nosník s tuhým votknutím. V takomto prípade by však k nelineárnej závislosti prispieval aj vzťah medzi posunutím a pretvorením (deformáciou) nosníka a analytické vyjadrenie tejto závislosti by bolo zložitejšie.

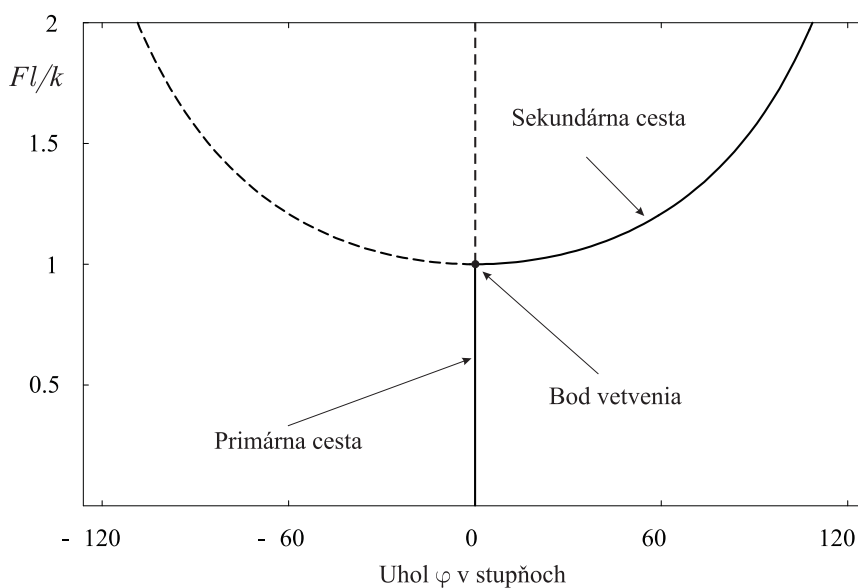
Numerické riešenie nelineárnych úloh znepríjemňuje aj fakt, že jednoznačnosť riešenia nie je vždy zaručená. Ak napr. tuhý nosník z predchádzajúceho príkladu zaťažíme silou F podľa obr. 1.3, potom pre jeho vychýlenú rovnovážnu polohu platí rovnica

$$k\varphi = Fl \sin \varphi \quad (1.3)$$



Obrázok 1.3

ktorá pre uhol φ má viac riešení. Triviálne riešenie je $\varphi = 0$, ktoré teoreticky platí pre ľubovoľnú hodnotu sily F a fyzikálne reprezentuje namáhanie prúta na tlak. Pre $Fl / k > 1$ ($|\varphi| > |\sin \varphi|$) dostávame dve ďalšie symetrické geometricky nelineárne riešenia (obr. 1.4), ktoré predstavujú dva možné odklony prúta od zvislého smeru. Pre $Fl / k > 1$ existujú teda tri rozdielne riešenia a riešenie problému nie je jednoznačné. Bod, v ktorom sa tzv. *primárna zaťažovacia cesta* rozdeľuje na dve alebo viaceré vetvy (v našom prípade limitný stav pre $\sin \varphi \rightarrow \varphi$, $\varphi \rightarrow 0$), sa nazýva *bod vetvenia* (bod bifurkácie). Jeho nájdením a hľadaním odpovede na otázku, ktorú z možných vetví si vyberie fyzikálny systém, sa zaoberá teória stability. V tomto prípade sa dá ukázať, že pre $Fl / k > 1$ je triviálne riešenie (čiarkovaná zvislá čiara v obr. 1.4) nestabilné. Fyzikálne to znamená, že v tomto stave stačí ľubovoľne malá bočná sila, alebo malá geometrická imperfekcia systému, aby prút prešiel do inej rovnovážnej polohy. Tlačený prút s malou bočnou tuhosťou sa teda za určitých okolností môže dostať do nestabilného stavu, s čím sa bližšie zoznámime v časti 10 pri analýze linearizovanej straty stability.

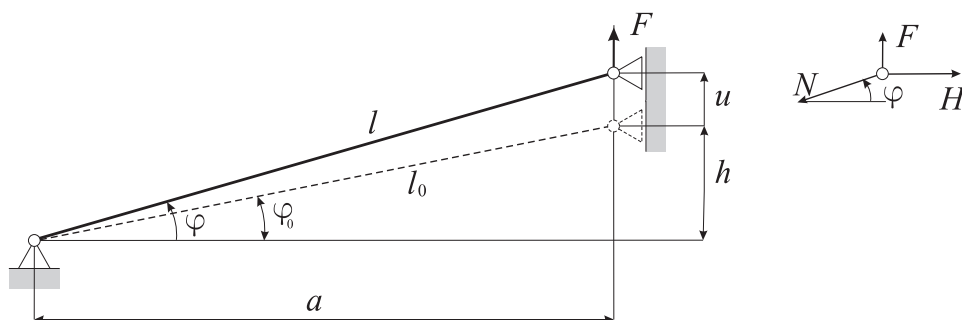


Obrázok 1.4

V predchádzajúcich príkladoch sme uvažovali dokonale tuhé teleso, ktoré pri zaťažovaní menilo svoju polohu ako tuhý celok. Pri zaťažovaní telesa z poddajného materiálu dochádza však k takým posunutiam bodov, že sa menia aj ich vzájomné vzdialenosti a hovoríme, že sa teleso deformuje. Mierou deformácie v okolí materiálového bodu telesa je tenzor deformácie a jeho zohľadnenie vnáša do nelineárnej pevnostnej úlohy tieto komplikácie:

- v prípade veľkých deformácií vzťah medzi posunutím a deformáciou je zdrojom ďalšej nelinearity
- deformácie v telese vyvolávajú vnútorné sily (napätia); vzťahy medzi deformáciami a napätiami (tzv. konštitutívne, resp. fyzikálne vzťahy), môžu byť tiež zdrojom ďalšej nelinearity

Uvažujme prút z poddajného materiálu upevnený a zaťažovaný podľa obr. 1.5, ktorý v nezaťaženom stave má prierezovú plochu S_0 . Prút je zaťažovaný silou F a upevnenie je také, že prút má len jeden stupeň voľnosti – zvislé posunutie pôsobiska sily u , ktorého závislosť od zaťažujúcej sily chceme určiť. Kvôli zjednodušeniu úlohy budeme predpokladať, že h je malé oproti a , takže aj pri relatívne veľkých posunutíach a rotáciách prúta, ktoré už vylučujú linearizáciu úlohy, budú ešte deformácie prúta (predĺženie alebo skrátenie) malé a budeme môcť zaviesť $l \approx l_0$.



Obrázok 1.5

Prút sa účinkom sily posunie z čiarkovanej polohy do rovnovážnej polohy vyznačenej plnou čiarou, kedy v ňom pôsobí vnútorná osová sila N . Zo silovej podmienky rovnováhy pôsobiska sily F v zvislom smere vyplýva

$$N \sin \varphi = F \rightarrow N \frac{h+u}{l} = F \rightarrow N \frac{h+u}{l_0} \approx F \quad (1.4)$$

kde približný vzťah vyplýva z uvedeného predpokladu malého začiatočného sklonu prúta.

Východiskom pre určenie potrebnej druhej rovnice je deformačná podmienka. Vzhľadom na upevnenie prúta sa prút musí predĺžiť o hodnotu

$$\Delta l = l - l_0 = \sqrt{(h+u)^2 + a^2} - \sqrt{h^2 + a^2} \quad (1.5)$$

treba však ešte nájsť vzťah medzi touto deformačnou veličinou a silou N . Celkové osovú predĺženie prúta Δl nie je objektívnou mierou pre tento vzťah, pretože závisí od dĺžky prúta. Zavádza sa preto pomerné predĺženie (pomerná osová deformácia), ktoré zvolíme v tvare

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1.6)$$

Pri danej deformácii ε vnútorná osová sila závisí ešte aj od prierezovej plochy prúta, a preto ju vzťahujeme na jednotku aktuálnej plochy vo forme osového napätia prúta. Pretože ide

o úlohu s malými deformáciami prúta, použijeme zjednodušenie $S \approx S_0$ a platí

$$\sigma = \frac{N}{S_0} \quad (1.7)$$

Vzťah medzi deformáciou ε a napätím σ , tzv. fyzikálna (konštitutívna) rovnica, závisí od materiálu prúta a môže byť nelineárny. Typickým príkladom je táto závislosť pre oceľ za medzou sklzu, ale existujú aj pružné materiály s nelineárnou závislosťou napätia na deformácii. Pretože sa zatiaľ zaoberáme len geometrickými nelinearitami, nebudeme príklad komplikovať fyzikálnou nelinearitou a budeme predpokladať, že prút je vyrobený z pružného materiálu s lineárnymi fyzikálnymi vlastnosťami podľa Hookeovho vzťahu

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} = \frac{N}{E_0 S_0} \quad (1.8)$$

kde predpokladáme, že začiatočný modul pružnosti materiálu prúta E_0 sa počas zaťažovania nemení.

Zo vzťahov (1.4) až (1.8) už môžeme vyjadriť závislosť posunutia pôsobiska sily od zaťaženia v tvare

$$E_0 S_0 \frac{l - l_0}{l_0^2} (h + u) = F \quad (1.9)$$

Napriek jednoduchosti úlohy i zavedených zjednodušení v rozpísanom tvare dostávame pomerne zložitú nelineárnu závislosť posunutia na zaťaženie

$$E_0 S_0 \frac{\sqrt{(h + u)^2 + a^2} - \sqrt{h^2 + a^2}}{h^2 + a^2} (h + u) = F \quad (1.10)$$

Ako sme už uviedli, ak sú deformácie, posunutia i rotácie malé ($\varepsilon \ll 1$, $\varphi \approx \varphi_0$) môžeme úlohu linearizovať, t.j. približne vyriešiť so zanedbateľnou chybou. V predchádzajúcom príklade by sme potom z rovnice (1.4) priamo dostali vnútornú silu v prúte

$$N \sin \varphi_0 = F \rightarrow N = \frac{F l_0}{h} \quad (1.11)$$

pre ktorú z Hookeovho zákona podľa (1.8) tiež platí

$$N = E_0 S_0 \varepsilon = E_0 S_0 \frac{\Delta l}{l_0} \quad (1.12)$$

Predĺženie prúta sa v tomto prípade určí tak, že v obr. 1.5, ktorý teraz predstavuje rovnovážnu polohu prúta vo veľkom zväčšení, sa urobí kolmica na koncový bod pôvodnej polohy prúta (rozdiel medzi oblúčikom a kolmicou je pri malej rotácii prúta zanedbateľný) a dostaneme

$$\Delta l = u \sin \varphi_0 = u \frac{h}{l_0} \quad (1.13)$$

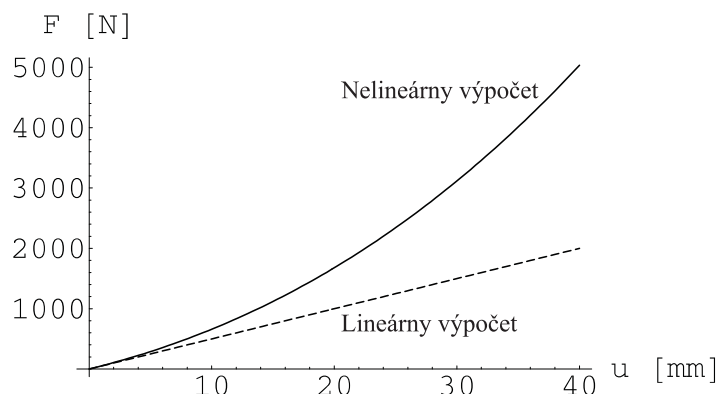
Z predchádzajúcich troch rovníc dostaneme lineárnu závislosť posunutia od zaťažujúcej sily

$$E_0 S_0 \frac{h^2}{l_0^3} u = F \quad (1.14)$$

Porovnanie oboch formulácií vedie k všeobecne platnému záveru, že pri lineárnej úlohe sa zanedbávajú všetky zmeny geometrie telesa, ktoré by viedli k nelineárnej závislosti vnútorných síl (v našom príklade N) na posunutíach (v našom príklade u).

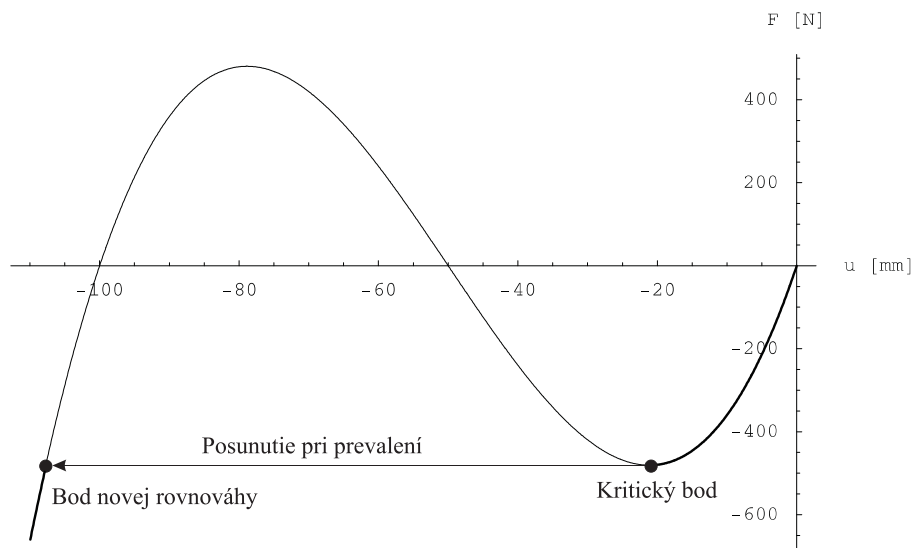
Vzťahy (1.10) a (1.14) sme pre plochú konštrukciu ($l_0 = 2000$ mm, $h = 50$ mm, $E_0 = 200000$

MPa, $S_0 = 800 \text{ mm}^2$) nakreslili v obr. 1.6, v ktorom vidieť, že zohľadnenie posunutia a rotácie prúta v rovnici rovnováhy spôsobuje odklon od lineárneho riešenia, ktorý sa pri úlohách s veľkými posunutiami a veľkými rotáciami telesa nemôže zanedbať.



Obrázok 1.6 Grafické znázornenie závislosti zaťaženia a posunutia pôsobiska sily pre prút na obr. 1.5

Ak otočíme zmysel sily F a zaťažíme prút na tlak, objavíme za pomoci rovnice (1.10) ďalší úkaz spojený s geometrickou nelinearitou *plochých* prútových, nosníkových a škrupinových konštrukcií – tzv. *prevalenie* (obr. 1.7). Je to v podstate náhly, rázový prechod z jednej rovnovážnej polohy do inej spojený s dynamickými sprievodnými javmi a obyčajne aj so stratou funkčnosti konštrukcie, príp. jej deštrukciou.



Obrázok 1.7 Krivka zaťaženie/posunutie pri tlakovom namáhaní prúta

V prípade malých pomerných predĺžení prúta, je výhodné do rovníc (1.4) až (1.8) zaviesť aproximáciu (tzv. Greenovo pomerné predĺženie ε_G)

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \approx \varepsilon_G = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{l_0} \right)^2 + \frac{hu}{l_0^2} \quad (1.15)$$

za pomoci ktorej sa (1.10) zjednoduší na

$$\frac{E_0 S_0}{2l_0^3} (u^3 + 3hu^2 + 2h^2u) = F \quad (1.16)$$

Pre malé deformácie ($\varepsilon \ll 1$) je aproximácia (1.15) oprávnená, pretože jednoduchou úpravou dostávame

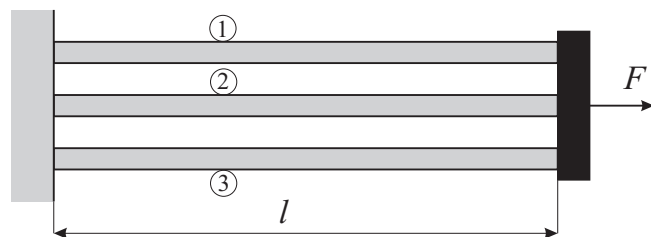
$$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{(l - l_0)(l + l_0)}{l_0(l + l_0)} = \frac{l^2 - l_0^2}{l_0(l_0 + \Delta l + l_0)} = \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2(2 + \varepsilon)} \quad (1.17)$$

Pre uvedený číselný príklad sú rozdiely v hodnotách vypočítaných zo vzťahov (1.16) a (1.10) sú tak malé, že ich grafické zobrazenia v obrázkoch 1.6 a 1.7 sú pri danej mierke obrázkov nerozoznatelné.

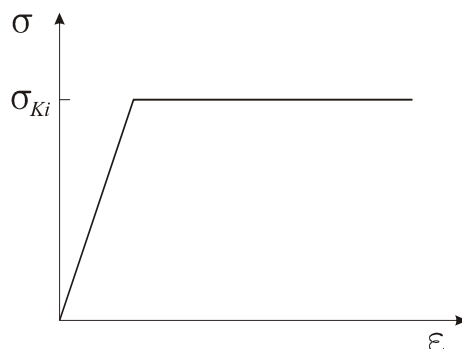
1.2 Fyzikálna nelinearita

Pri príkladoch geometricky nelineárnych úloh uvedených v časti 1.1 sme predpokladali, že vzťahy medzi zložkami deformácie a zložkami napätia sú lineárne. Pravda, tento predpoklad pre mnohé materiály buď neplatí, alebo platí len za určitých predpokladov (napr. len pre malé deformácie). Ako jednoduchý príklad môžeme uviesť ťahanie gumového pásu, ktorého tuhosť sa so zväčšovaním natiahnutia zväčšuje (nelineárna elasticita), alebo ťah ocelevej tyče za medzou sklzu (pružne plastická deformácia) a i.

Fyzikálna nelinearita vznikajúca pri lokálnej plastizácii telesa sa dá ilustrovať na príklade znázornenom v obr. 1.8. Tri prúty s rovnakými hodnotami modulu pružnosti v ťahu E a prie-



Obrázok 1.8



Obrázok 1.9

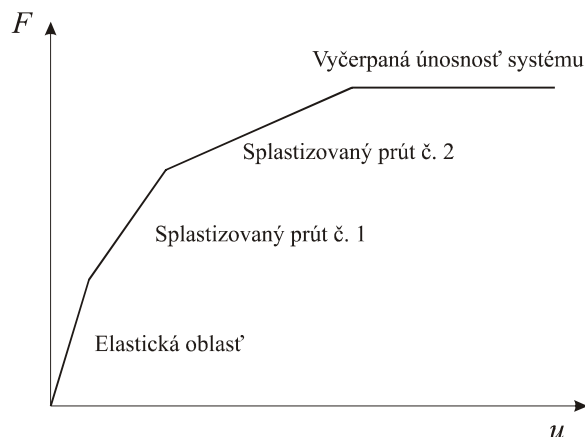
rezmi S sú cez dokonale tuhú dosku ťahané silou F . Prúty sú vyrobené z ideálne plastického materiálu (obr. 1.9) a majú rozdielnú medzu sklzu v ťahu σ_{Ki} , $i = 1, 2, 3$, pričom platí $\sigma_{K1} < \sigma_{K2} < \sigma_{K3}$. Pri zaťažovaní v elastickej oblasti sa systém chová ako pružina s tuhosťou k a závislosť sily F na posunutí u je

$$F = ku = \frac{3ES}{l}u$$

Akonáhle napätie v prúte č. 1 dosiahne medzu sklzu σ_{K1} , tento prút už nie je schopný prenášať prírastok zaťaženia a tuhosť systému sa zníži na $k_1 = 2ES/l$, pri plastickom tečení prúta č.2 sa tuhosť opäť zmenší na hodnotu $k_2 = ES/l$ a po splastizovaní aj posledného prúta sa pri hodnote sily

$$F_k = S(\sigma_{K1} + \sigma_{K2} + \sigma_{K3})$$

vyčerpá celková únosnosť systému. V celkovom rozsahu zaťažovania je závislosť sily od posunutia multilinéárna (obr. 1.10).



Obrázok 1.10

Analogicky by sa prútový systém správal aj v prípade rovnakej medze sklzu všetkých prútov, ale pri ich nerovnomernom zaťažovaní. Takýto prípad nastáva pri všeobecnom telese, v ktorom sa najprv dosiahne medza sklzu v najviac zaťaženej lokalite, tam sa tuhosť materiálu zníži (materiál so spevnením), alebo materiál už nie je schopný prijímať prírastok zaťaženia (ideálne plastický materiál), plastická zóna sa šíri do okolitých častí telesa a závislosť charakteristického posunutia od zaťaženia vykazuje plynulú nelineárnu krivku.

Pružne-plastické zaťažovanie je jedna z foriem *fyzikálnej nelinearity*, ktorá môže, ale aj nemusí byť, kombinovaná s inými formami nelinearity.

1.3 Nelinearita vyvolaná okrajovými podmienkami

Pri riešení pevnostnej úlohy skutočné zaťaženie a upevnenie telesa nahradzujeme idealizovanými silami a väzbami, ktorých voľba musí zaručovať dostatočne presnú simuláciu reálnych okrajových podmienok. V skutočnosti zaťaženia i upevnenia telesa často predstavujú účinky iných telies, ktoré sú v kontakte s vyšetrovaným telesom a ich deformačné (tuhostné) vlastnosti ovplyvňujú zaťaženie vyšetrovaného telesa tak, že okrajové podmienky nemôžeme idealizovať, ani ich považovať za známe a konštantné počas zaťažovania.

Napr. styková ploška pneumatiky a podložky sa pri zmene zaťaženia mení a ovplyvňuje stykový tlak. Ak dvakrát zväčšíme zaťaženie pneumatiky, nedá sa povedať, že sa dvakrát zväčší stykový tlak, pretože sa zároveň o neznámu hodnotu zväčší styková plocha, čo o určitú hodnotu zníži stykový tlak oproti lineárne určenej hodnote. Táto závislosť je nelineárna, ovplyvňujú ju tuhostné a materiálové vlastnosti oboch častí a treba ju zaradiť do kategórie *kontaktných úloh*, pri ktorých zdrojom nelinearity sú zmeny okrajových podmienok počas zaťažovania.

Ovplyvnenie zaťažovacej cesty telesa zmenou okrajových podmienok možno dokumentovať na jednoduchej úlohe znázornenej v obr. 1.11. Prút s modulom pružnosti v ťahu/tlaku E a prierezom S je v bode A zaťažený silou F . Koncový bod B je od dokonale tuhej steny vzdialený o malú hodnotu δ . Pokiaľ je deformácia prúta taká, že mu stena nebráni v pohybe, prút sa správa ako pružina s tuhosťou ES/l a platí

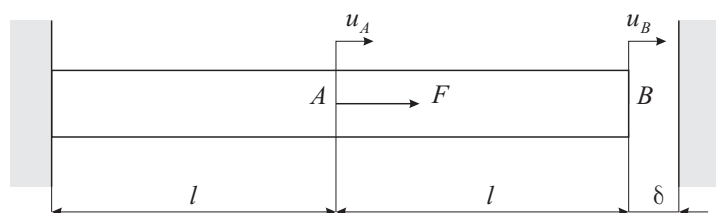
$$F = ku_A = \frac{ES}{l} u_A \quad u_B = u_A \leq \delta$$

Po kontakte s tuhú stenou sa posunutie bodu B zastaví, na prút v tomto mieste začne pôsobiť

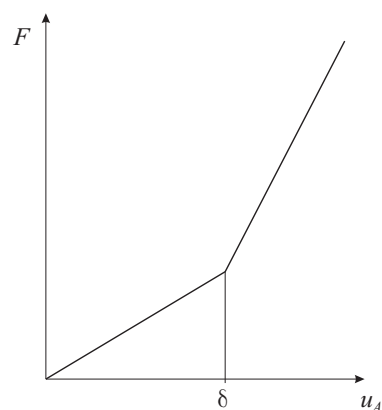
reakcia a tuhosť prúta sa zmení (v tomto prípade na dvojnásobok; sila F pri posunutí bodu A musí teraz ešte aj stlačiť úsek AB , ktorý má rovnakú tuhosť ako ťahaný úsek prúta). Pre závislosť sily a posunutia bodu A potom platí

$$F = ku_A = \frac{2ES}{l}u_A \quad u_A > \delta$$

Táto závislosť v celom rozsahu zaťažovania teda nie je lineárna (obr. 1.12), v prípade zložitejších úloh opäť dostávame spojitú nelineárnu zaťažovaciu dráhu vyplývajúcu zo spojitý zmeny rovnice rovnováhy, resp. rovníc rovnováhy takejto úlohy.



Obrázok 1.11



Obrázok 1.12

V predchádzajúcich častiach sme poukázali na hlavné zdroje nelinearít, ktoré sa pri reálnych pevnostných úlohách môžu objavovať v rozličných kombináciách. Analytické riešenie takýchto úloh, t. j. nájdenie nelineárnej funkčnej závislosti hľadaných veličín od vstupných hodnôt, je možné len pri jednoduchých úlohách. V nasledujúcej časti využijeme takéto úlohy ešte na vysvetlenie numerického (iteračného) postupu riešenia nelineárnych úloh, ktorého princíp sa uplatňuje aj v MKP pri riešení zložitejších úloh.

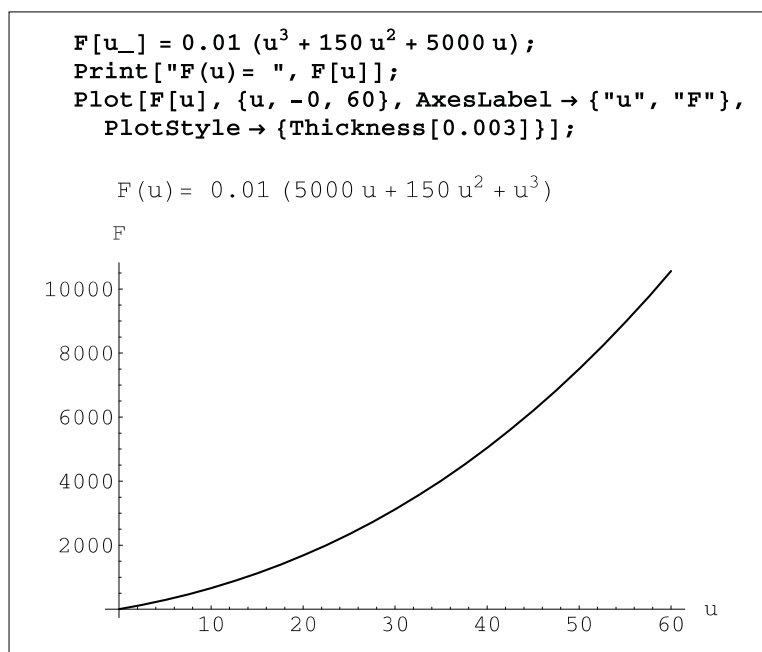
2 Numerické (iteračné) riešenie nelineárnych rovníc

Formulácia nelineárnej pevnostnej úlohy v MKP vedie na *sústavu nelineárnych rovníc*, ktorej neznáme predstavujú číselné hodnoty zložiek zovšeobecnených posunutí (premiestnení, natočení) uzlových bodov výpočtového modelu úlohy. Rovnice sústavy, rovnako ako pri lineárnej úlohe [10], predstavujú silové (pri existencii rotačných stupňov voľnosti aj momentové) rovnice rovnováhy uzlových bodov výpočtového modelu telesa pre danú hodnotu zaťaženia a ich počet je rovný celkovému počtu stupňov voľnosti modelu. Na riešenie sústavy nelineárnych rovníc sa v programoch MKP využívajú algoritmy vo forme naprogramovaných *riešičov (solvers)*, ktoré vychádzajú zo základných matematických metód riešenia takýchto úloh [11]. Najčastejšie využívajú iteračný postup vychádzajúci z princípu Newton-Raphsonovej metódy, pomocou ktorej si teraz pripomenieme základné pojmy z oblasti numerického riešenia nelineárnych rovníc, so špeciálnym zameraním na rovnice pevnostných úloh.

Vráťme sa k jednorozmernej úlohe na obr. 1.5 a zvolíme pre prút číselné hodnoty: $E_0 = 200\,000$ MPa, $S_0 = 800$ mm², $l_0 = 2000$ mm, $h = 50$ mm. Dosadením týchto hodnôt do rovnice (1.16) dostaneme vzťah medzi koncovým posunutím prúta a zaťažujúcou silou

$$0,01(u^3 + 150u^2 + 5000u) = F \quad (2.1)$$

Funkčnú závislosť veličín v tomto vzťahu sme pomocou programu *Mathematica* [12] pre kladné hodnoty zaťažujúcej sily F (aby sme sa vyhli nestabilite úlohy pri tlakovom zaťažení) graficky znázornili na obr. 2.1.



Obrázok 2.1

Pokiaľ mienime hľadať pre určitú hodnotu sily posunutie iteračne, je kvôli kontrole iteračného procesu výhodné zapísať rovnicu rovnováhy (2.1) v tvare

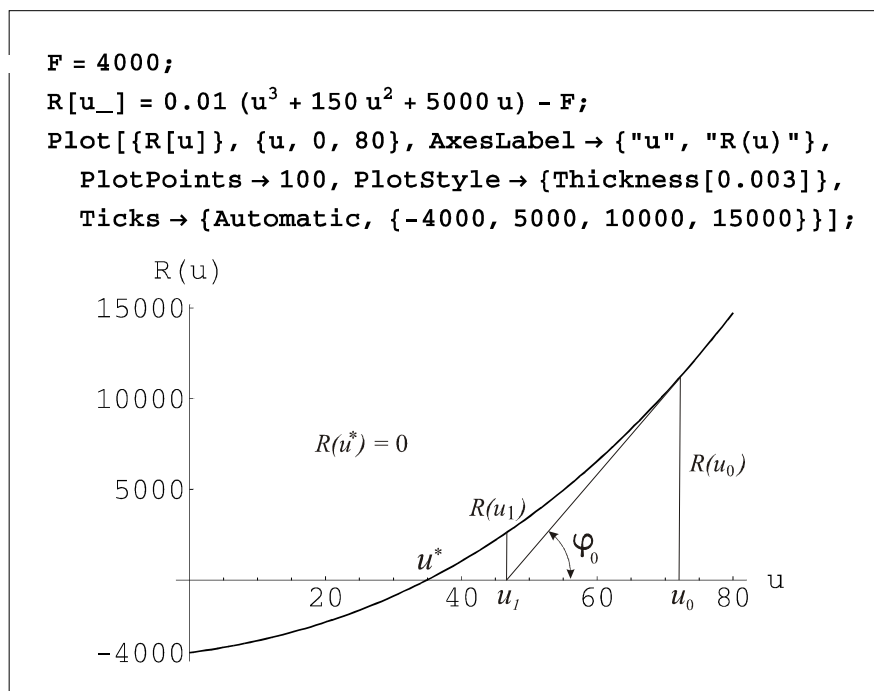
$$R(u) = 0,01(u^3 + 150u^2 + 5000u) - F = 0 \quad (2.2)$$

kde $R(u)$ sa nazýva *nerovnovážna sila*, pretože rovnica rovnováhy prúta (2.1) je splnená len

vtedy, keď sa táto sila rovná nule. Ak napr. zvolíme silu $F = 4000$ N, nerovnovážna sila bude

$$R(u) = 0,01(u^3 + 150u^2 + 5000u) - 4000 \quad (2.3)$$

Grafické znázornenie tejto funkcie na obr. 2.2 ukazuje, že posunutie prúta pri sile $F = 4000$ N sa nachádza v okolí hodnoty $u = 35$ mm.



Obrázok 2.2

Princíp Newton-Raphsonovej metódy sa na rovnici s jednou neznámou dá vysvetliť jednoducho. Zvoľme začiatočnú hodnotu posunutia u_0 a vyjadriť nerovnovážnu silu $R(u_0)$. V tomto bode (obr. 2.2) urobme dotyčnicu ku krivke (dá sa to nazvať linearizáciou funkcie $R(u)$ v okolí tohto bodu), ktorá nám vyznačí posunutie u_1 na osi u , ako prvé priblíženie k riešeniu u^* . Posunutie u_1 sa dá ľahko určiť, pretože, ako vidieť z obrázku, platí

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{dR(u_0)}{du} = \frac{R(u_0)}{u_0 - u_1}$$

a z toho

$$u_1 = u_0 - \frac{R(u_0)}{dR(u_0)/du}$$

Opakovanie tohoto postupu s hodnotou u_1 a ďalšími je základom pre potrebný iteračný algoritmus.

Pri Newton-Rapsonovej metóde sa koreň (riešenie) jednorozmernej rovnovnovážnej rovnice hľadá teda takto:

1. Vypočíta sa gradient funkcie $R(u)$, tzv. *tangenciálna tuhosť*

$$K_T(u) = \frac{dR}{du} \quad (2.4)$$

2. Zvolí sa začiatkové posunutie u_0

3. V cykle od $i = 0$ až po zvolenú hodnotu maximálneho prípustného počtu iterácií i_{max} sa

a) počíta nasledujúca hodnota posunutia

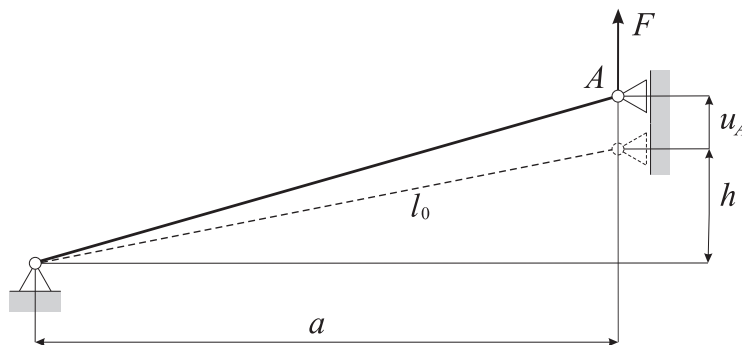
$$u_{i+1} = u_i - \frac{R(u_i)}{K_T(u_i)} \quad (2.5)$$

b) absolútna hodnota nerovnovážnej sily $|R_{i+1}| = |R(u_{i+1})|$ sa porovnáva s predpísanou toleranciou R_{tol} a vykonávajú sa rozhodovacie kroky

- ak $|R_{i+1}| \geq R_{tol}$, choď na bod 3, ak nie, ukonči riešenie
- ak $i > i_{max}$, ukonči riešenie

Príklad 2.1

Pre prút upevnený a zaťažný podľa obr. 2.3 vypočítajte Newton-Raphsonovou metódou zvislé posunutie koncového bodu prúta u_A so zvolenou prípustnou chybou riešenia $R_{tol} = 1$ N, keď je dané: $F = 4000$ N, $l_0 = 2000$ mm, $h = 50$ mm, $E_0 = 200\,000$ MPa, $S_0 = 800$ mm².



Obrázok 2.3

Vzťah medzi posunutím koncového bodu prúta a zaťažovacou silou vo forme nerovnovážnej sily udáva rovnica (2.3)

$$R(u) = 0,01(u^3 + 150u^2 + 5000u) - 4000$$

Tangenciálna tuhosť prúta je $K_T(u) = \frac{dR}{du} = 0,01(3u^2 + 300u + 5000)$

Prvý krok iteračného riešenia ($i = 0$):

Zvoľme začiatkové posunutie $u_0 = 0$

$$\text{Prvá hodnota posunutia je } u_1 = u_0 - \frac{R(0)}{K_T(0)} = 0 - \frac{-4000}{50} = 80 \text{ mm}$$

Absolútna hodnota nerovnovážnej sily pri tejto hodnote posunutia podľa (2.3) je $|R_1| = 14720$ N

Druhý krok ($i = 1$):

$$\text{Opravená hodnota posunutia je } u_2 = u_1 - \frac{R(80)}{K_T(80)} = 80 - \frac{14720}{482} = 49,46 \text{ mm}$$

$$\text{Nerovnovážna sila je } |R_2| = 3352,5 \text{ N}$$

Tretí krok ($i = 2$)

$$\text{Opravená hodnota posunutia je } u_3 = u_2 - \frac{R(49,46)}{K_T(49,46)} = 49,46 - \frac{3352,53}{271,77} = 37,12 \text{ mm}$$

$$\text{Nerovnovážna sila poklesla na } |R_3| = 435,28 \text{ N}$$

Na výpočet hodnôt v ďalších krokoch využijeme program uvedený na obr. 2.4, kde sú zároveň uvedené aj vypočítané hodnoty príkladu v ďalších krokoch. Grafická ilustrácia iteračného postupu riešenia úlohy je znázornená na obr. 2.5.

```
NR[F_, uzac_, imax_, tol_] :=
Module[{ },
  r[u_] = 0.01 * (u^3 + 150 * u^2 + 5000 * u) - F;
  i = 0;
  u0 = uzac;
  Print[" u0 = ", u0, ", r0 = ", r[u0]];
  u1 = u0;
  While[i < imax && tol < Abs[r[u1]],
    u0 = u1;
    u1 = u0 - r[u0] / r'[u0];
    i = i + 1;
    Print[" i = ", i, ", u(i) = ",
      PaddedForm[u1, {6, 4}], ", r(i) = ", PaddedForm[r[u1], {9, 4}]];
  ];

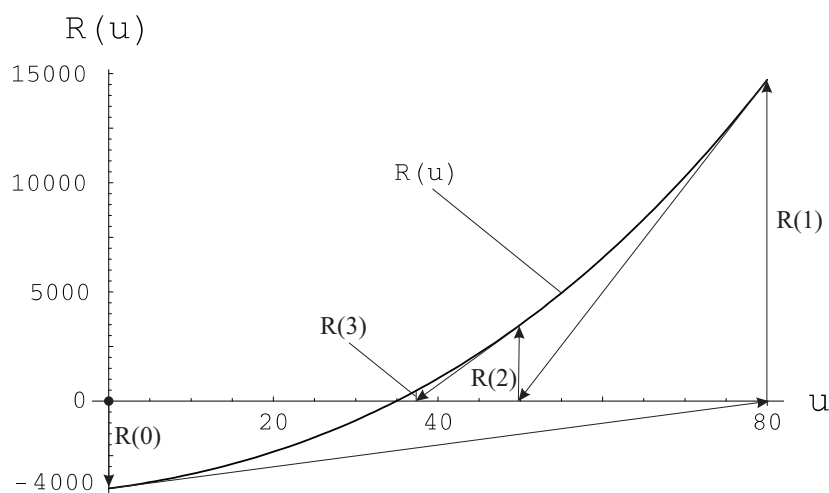
NR[4000, 0, 7, 1];

u0 = 0, r0 = -4000

i = 1, u(i) = 80.0000, r(i) = 14720.0000
i = 2, u(i) = 49.4606, r(i) = 3352.5311
i = 3, u(i) = 37.1248, r(i) = 435.2826
i = 4, u(i) = 34.9776, r(i) = 11.9515
i = 5, u(i) = 34.9152, r(i) = 0.0099
```

Obrázok 2.4

Z výsledku iterácie je vidieť, že dostatočne presným riešením rovnice (2.1) je posunutie s hodnotou $u_A = 34,92 \text{ mm}$.



Obrázok 2.5

Na všeobecné využívanie metódy je užitočné si pripomenúť jej matematický princíp: funkciu $r(u)$ možno v okolí bodu u_i aproximovať (linearizovať) rozkladom do skráteného Taylorovho radu

$$r(u) \approx r(u_i) + \frac{df(u_i)}{dx}(u - u_i) \quad (2.6)$$

Riešenie rovnice $r(u) = 0$ možno potom dostať postupným iteračným riešením rovnice

$$r(u_i) + \frac{df(u_i)}{dx} \Delta u = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u$$

v rozsahu presnosti stanovenej zvolenou podmienkou kovergencie (pravda, konvergencia nie je zaručená pre ľubovoľný typ funkcie f).

Newton-Raphsonovu metódu možno zovšeobecniť aj pre sústavu nelineárnych rovníc s viacerými neznámymi. V takejto úprave sa štandardne využíva v MKP, pretože aplikácia tejto metódy na nelineárnu pevnostnú úlohu vedie na sústavu takýchto rovníc. Neznámymi sú zovšeobecnené posunutia uzlových bodov výpočtového modelu telesa usporiadané vo vektore $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]^T$. V maticovom zápise sústava rovníc rovnováhy telesa má tvar

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

kde $\mathbf{f}$ je známy vektor vonkajších uzlových síl telesa a $\mathbf{q}(\mathbf{u})$ je vektor vnútorných uzlových síl výpočtového modelu MKP vypočítaný z napätí v konečných prvkoch obsahujúci nelineárne funkcie neznámych $\mathbf{u}$; rovnice (2.8) vlastne vyjadrujú to, že teleso je v rovnováhe, keď v každom uzle sa vnútorné uzlové sily rovnajú vonkajším uzlovým silám (v uzle bez vonkajších síl sú samotné vnútorné uzlové sily v rovnováhe). Pomocou MKP vytvoríme systém (2.8) a potom vychádzajúc zo zvolených začiatkových hodnôt $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ iteračne upravujeme posunutia $\mathbf{u}$ tak, aby nerovnovážne sily vo vektore $\mathbf{r}$ poklesli na dostatočne malé hodnoty podľa určitej predpísanej podmienky konvergencie.

Newton-Raphsonova metóda pre systém nelineárnych rovníc $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, analogicky s jednorozmerným prípadom, spočíva v linearizovaní zložiek vektorovej funkcie [13]

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = [f_1(\mathbf{u}), f_2(\mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{u})]^T$$

pomocou ich prvého diferenciálu a v zámene nelineárneho systému rovníc lineárnym systémom pre opravu argumentov $\Delta \mathbf{u}$. Riešením tohoto lineárneho systému dostávame novú iteráciu $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$ približného riešenia. Opakovaním tohoto postupu najdeme približnú hodnotu riešenia $\mathbf{u}$ s požadovanou toleranciou buď pre $\mathbf{u}$ alebo $\mathbf{r}$.

Linearizovaním systému $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ v okolí začiatočnej aproximácie dostávame

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}_0) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

Prvú aproximáciu $\mathbf{u}_1$ hľadáme tak, aby $\mathbf{r}_L(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$. Potom platí

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = -\mathbf{r}(\mathbf{u}_0) \quad (2.9)$$

Po zvolení začiatočných (východných) hodnôt posunutí $\mathbf{u}_0$ predstavuje (2.9) lineárny systém rovníc s neznámym vektorom $\Delta \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$. Ak matica tohoto systému je regulárna potom jeho riešenie je

$$\Delta \mathbf{u}_0 = -[\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_0)]^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}_0)$$

s tzv. tangenciálnou maticou tuhosti telesa (Jacobiho maticou)

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \partial R_1 / \partial u_1 & \partial R_1 / \partial u_2 & \dots & \partial R_1 / \partial u_n \\ \partial R_2 / \partial u_1 & \partial R_2 / \partial u_2 & \dots & \partial R_2 / \partial u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial R_n / \partial u_1 & \partial R_n / \partial u_2 & \dots & \partial R_n / \partial u_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Hľadaná aproximácia potom je $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}_0$. Opakovaním tohoto postupu dostaneme vzťah pre postupnosť aproximácií

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i - [\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i)]^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_{max} \quad (2.11)$$

Ak táto postupnosť konverguje k riešeniu sústavy rovnovážnych rovníc (2.8), tak sa výpočet ukončuje podmienkou pre $\|\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|$ alebo $\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|$.

V prípadoch, keď vonkajšie uzlové sily $\mathbf{f}$ v (2.8) nie sú závislé od posunutí, možno tangenciálnu maticu tuhosti vyjadriť z vnútorných uzlových síl a platí

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.12)$$

Procedúra si, ako vidieť z (2.11), vyžaduje v každom iteračnom kroku inverziu tangenciálnej matice tuhosti telesa, čo pri veľkých úlohách môže byť náročné na strojový čas počítača. Na druhej strane v takomto prípade je zaručená kvadratická konvergencia iteračného procesu a hovoríme o úplnej Newton-Raphsonovej metóde (*full N-R method*). V programoch MKP možno obyčajne zvoliť aj tzv. upravenú Newton-Raphsonovu metódu (*modified N-R method*), kedy sa inverzia tangenciálnej matice tuhosti vykoná len raz – na začiatku iteračného procesu

a v ďalších iteračných krokoch sa už nemení. Vo všetkých iteračných krokoch sa teda využíva matica $[\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_0)]^{-1}$. Iteračný proces sa urýchli, narastie však počet iteračných krokov, pretože rýchlosť konvergenzie sa zníži.

Rovnicu (2.11) možno upraviť na

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i = - [\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i)]^{-1} (\mathbf{q}_i - \mathbf{f}) \quad (2.13)$$

a ďalej po vynásobení zľava s $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i)$ na tvar v ktorom sa obyčajne vyskytuje v programových manuáloch

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i) \Delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{f} - \mathbf{q}_i \quad (2.14)$$

Predpokladajme, že sa iteračná procedúra začína na nezaťaženom telese. Vtedy sú posunutia uzlových bodov nulové ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{lin}$) a pretože aj napätia sú nulové ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$) začiatkový iteračný krok sa vykoná s lineárnou sústavou rovníc

$$\mathbf{K}_{lin} \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}$$

Z vypočítaného lineárneho riešenia $\mathbf{u}_1$ sa určia deformácie a napätia v prvkoch, z nich $\mathbf{q}_1$ a vektor nerovnovážnych uzlových síl $\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{f} - \mathbf{q}_1$ prvého iteračného kroku. Vytvorí sa aj tangenciálna matica tuhosti pre ďalší iteračný krok. Podľa (2.13) sa potom počítajú opravy posunutí $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ a s novými posunutiami $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_{i+1}$ iteračný proces pokračuje až po splnenie podmienok konvergenzie. V prípade lineárnej úlohy sa konvergenzia dosiahne v prvom iteračnom kroku.

Príklad 2.2

Aplikácia MKP na riešenie geometricky nelineárnej jednoduchej prútovej sústavy s jediným voľným uzlovým bodom s tromi stupňami voľnosti viedla na sústavu troch uzlových rovníc rovnováhy

$$\begin{aligned} R_1(u_1, u_2, u_3) &= (0,01u_1^2 + 50)u_1 + 1,5u_1u_2^2 - 1,5u_1u_3^2 - 600 = 0 \\ R_2(u_1, u_2, u_3) &= 1,5u_1^2u_2 + (0,01u_2^2 + 50)u_2 + 1,5u_2u_3^2 - 800 = 0 \\ R_3(u_1, u_2, u_3) &= -1,5u_1^2u_3 + 1,5u_2^2u_3 + (0,01u_3^2 + 50)u_3 - 500 = 0 \end{aligned}$$

v maticovom zápise

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

kde vektor $\mathbf{f}$ obsahuje pravouhlé zložky v každej sily pôsobiacej v tomto uzle. Určte Newton-Raphsonovou metódou zložky posunutia uzlového bodu $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$.

Riešenie úlohy je uvedené v obr. 2.6, kde v časti a) je uvedená zadaná sústava rovníc, v časti b) je uvedený program na riešenie úlohy, spúšťací príkaz programu s potrebnými vstupnými parametrami je v časti c) a posledná časť d) obsahuje iteračnú postupnosť riešení s výsledným vektorom nerovnovážnych síl.

<pre> R1[{u1_, u2_, u3_}] = (0.01 u1^2 + 50) u1 + 1.5 u2^2 u1 - 1.5 u3^2 u1 - 600; R2[{u1_, u2_, u3_}] = 1.5 u1^2 u2 + (0.01 u2^2 + 50) u2 + 1.5 u3^2 u2 - 800; R3[{u1_, u2_, u3_}] = -1.5 u1^2 u3 + 1.5 u2^2 u3 + (0.01 u3^2 + 50) u3 - 500; R[{u1_, u2_, u3_}] = {R1[{u1, u2, u3}], R2[{u1, u2, u3}], R3[{u1, u2, u3}]}; NewtonRaphson[u0_, tol_, max_] := Module[{norma = 1, i = 0}, u0 = u0; Print["u0 = ", u0]; KT[{u1_, u2_, u3_}] = Transpose[{D_u1 R[{u1, u2, u3}], D_u2 R[{u1, u2, u3}], D_u3 R[{u1, u2, u3}]}]; While[And[i < max, norma > tol], u1 = u0 - (Inverse[KT[u0]]) . R[u0]; Print["u" i + 1, " = ", u1]; norma = Sqrt[(u1 - u0) . (u1 - u0)]; If[norma < tol, Print["r" i + 1, " = ", MatrixForm[R[u1]]]]; u0 = u1; i = i + 1;]; u0 = {0., 0., 0.}; NewtonRaphson[u0, 10^-3, 30]; u0 = {0., 0., 0.} u1 = {12., 16., 10.} u2 = {8.09783, 11.0354, 6.77938} u3 = {5.70581, 8.60238, 4.85192} u4 = {4.40778, 8.32121, 3.8068} u5 = {3.8515, 8.92314, 3.32305} u6 = {3.73247, 9.16435, 3.21805} u7 = {3.72762, 9.17659, 3.21387} u8 = {3.72761, 9.17661, 3.21386} r8 = { -1.5248 x 10^-9 -1.1477 x 10^-9 -1.42938 x 10^-9 } </pre>	a
b	
c	
d	

Obrázok 2.6

Z výsledkov je vidieť, že iterácia začína s nulovými zložkami posunutia ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$), vektor $\mathbf{u}_1$ obsahuje lineárne riešenie a v závere vektor $\mathbf{u}_8$ udáva hodnoty pravouhlých zložiek posunutia v uzle (v mm), ktoré spĺňajú konvergenčnú podmienku. Vektor $\mathbf{r}_8$ obsahuje hodnoty zložiek nerovnovážnej sily uzla pri takýchto hodnotách posunutia, t. j. hodnoty, ktoré spĺňajú podmienku konvergenencie.

Principiálne takýmto spôsobom využívajú Newton-Raphsonovu metódu aj programy MKP, napr. aj program ANSYS [14], ktorý budeme v tejto práci využívať na riešenie jednoduchých nelineárnych pevnostných úloh tak, aby uvedený postup bol aplikovateľný aj na riešenie reálnych úloh technickej praxe.