24 Elektromagnetické pole

24.1 Úvod a základné pojmy

Elektromagnetické pole vytvárané elektricky nabitými objektami vo všeobecnosti predstavuje vzájomnú väzbu elektrického a magnetického poľa. Pre elektromagnetické pole platia štyri Maxwellove rovnice

1. Gaussov zákon elektrostatiky

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{0.1}$$

2. Zákon spojitosti indukčného toku

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{0.2}$$

3. Zákon elektromagnetickej indukcie (Faradayov indukčný zákon)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{0.3}$$

4. Zákon celkového prúdu (zovšeobecnený Ampérov zákon)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{0.4}$$

kde $\nabla \cdot$ je operátor divergencie
- $\nabla \times$ je operátor rotácie
- $\mathbf{D}$ je vektor hustoty elektrického toku [C/m^2]
- $\mathbf{B}$ je vektor hustoty magnetického toku (magnetická indukcia) [T, Wb/m^2]
- $\mathbf{E}$ je vektor intenzity elektrického poľa [V/m]
- $\mathbf{H}$ je vektor intenzity magnetického poľa [A/m]
- $\mathbf{J}$ je vektor hustoty elektrického prúdu [A/m^2]
- ρ je hustota elektrického náboja [C/m^3]
- t je čas [s]

Ak vyjadríme divergenciu oboch strán rovnice (0.4) dostaneme rovnicu kontinuity (divergencia rotácie vektorového poľa sa rovná nule)

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0 \tag{0.5}$$

Uvedené rovnice sa dopĺňajú konštitutívnymi (látkovými) rovnicami, ktoré udávajú vlastnosti elektromagnetického materiálu (látky). Pre izotropný magnetický materiál platí

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{0.6}$$

kde μ je permeabilita materiálu [H/m]

μ_0 je permeabilita vákua (μ_0 = $4\pi \cdot 10^{-7}$H/m)

$\mu_r = \mu / \mu_0$ je relatívna permeabilita materiálu [-]

V prípade, že je permeabilita μ funkciou poľa, potom je potrebné ju zadať pomocou krivky závislosti B na H.

Ak sú v skúmanej oblasti prítomné aj permanentné magnety, vzťah (0.6) sa dopĺňa o indukčné pole magnetov

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \tag{0.7}$$

kde $\mathbf{M}$ [A/m] je magnetizácia (magnetizačný vektor).

Konštitutívne vzťahy pre (zviazané) elektrické pole sú

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{0.8}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} \tag{0.9}$$

kde σ je elektrická vodivosť materiálu [S/m]

ε je permitivita materiálu [F/m]

$\mathbf{v}$ je vektor rýchlosti [m/s]

ε_0 je permitivita vákua ($\varepsilon_0 \approx 8{,}854188\cdot 10^{-12}$ [F/m])

$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ je relatívna permitivita materiálu [-]

Pri uvedenom všeobecnom tvare Maxwellových rovníc sa uvažuje časová zmena elektrického a magnetického poľa. To znamená, že elektricky nabité objekty neprodukujú len elektrické pole ale časovou zmenou (pohybom) aj magnetické pole. Analogicky magnetické pole pri časovej zmene produkuje elektrické pole vo všeobecnosti tiež časovo závislé. V takomto prípade hovoríme o *elektrodynamike.*

V prípade, že elektrické pole sa s časom nemení ($\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$), hovoríme o *elektrostatike.* Z Faradyovho zákona potom vyplýva absencia časovo premenlivého magnetického poľa, $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$. Pravda aj v elektrostatike sa môžeme stretnúť s magnetickým poľom alebo elektrickým prúdom, ktoré sú však statické, na čase nezávislé.

Inou špeciálnou kategóriou je *magnetostatika*, charakterizovaná statickým magnetickým poľom. Často sa využíva aj ako vhodná aproximácia prípadu, kedy sa elektrický prúd s časom pomaly mení.

V prípade periodickej zmeny elektromagnetického poľa s frekvenciou f [Hz] dochádza k priestorovej a časovej zmene vektora intenzity elektrického poľa a zviazaného vektora hustoty magnetického poľa. Vzniká elektromagnetické vlnenie spojené s prenosom energie vo forme elektromagnetickej radiácie (pozri kap. 18).

Na základe veľkosti frekvencie sa numerické procedúry MKP pre analýzu elektromagnetického poľa delia na *nízkofrekvenčné* a *vysokofrekvenčné*. Nízkofrekvenčné výpočtové procedúry sa používajú v prípadoch kedy dĺžka vlny je výrazne väčšia ako geometrické rozmery objektu. Je to oblasť zhruba pod rádiovými frekvenciami a hlboko v tejto oblasti leží aj frekvencia striedavého prúdu (50 Hz).

24.2 Elektrické pole

Ak v Maxwellových rovniciach zanedbáme časovú zmenu hustoty magnetického toku $\partial\mathbf{B}/\partial t$, dostaneme ich aproximáciu s $\nabla\times\mathbf{E} = \mathbf{0}$ a bez obojstrannej väzby elektrického a magnetického poľa. Potom intenzitu (nevírového, konzervatívneho) elektrického poľa možno určovať zo vzťahu

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \tag{0.10}$$

kde ϕ [V] je elektrický potenciál. Ak nás zaujíma len analýza elektrického poľa, možno rovnicu (0.2) neuvažovať a rovnicu (0.4) nahradiť rovnicou kontinuity (0.5) s využitím konštitutívnych vzťahov (bez rýchlostného efektu) (0.8) a (0.9)

$$\nabla \cdot \left[\sigma \mathbf{E} + \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \right] = 0 \tag{0.11}$$

Po využití (0.10) v tejto rovnici dostávame diferenciálnu rovnicu pre skalárny potenciál, vhodnú pre aproximatívne (numerické) riešenie nestacionárneho elektrického poľa

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) - \nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \tag{0.12}$$

s primárnou neznámou ϕ. Intenzita elektrického poľa sa potom určuje z (0.10). Špeciálnym prípadom je rovnica ustálenej elektrickej kondukcie

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \tag{0.13}$$

Diferenciálnu rovnicu ustáleného elektrického (elektrostatického) poľa v elektricky izotropnom prostredí s permitivitou ε a objemovou hustotou náboja ρ dostaneme zo vzťahov (0.1), (0.10) a (0.9) v tvare Poissonovej rovnice

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{0.14}$$

Rovnice opisujúce elektrické pole slúžia ako východzí zdroj pre formuláciu matíc MKP pre numerické riešenie tejto triedy úloh. Na tento účel možno opätovne využiť Galerkinovu metódu s analogickým postupom ako pri iných fyzikálnych úlohach z predchádzajúcich častí knihy. Pretože elektrický potenciál je skalár, tak ako teplota pri úlohe vedenia tepla, postup jeho výpočtu pomocou MKP je v podstate rovnaký ako postup výpočtu teploty v kapitole 8 (Určenie matíc prvku priamo z diferenciálnych rovníc prvku), kde je Galerkinova metóda podrobne vysvetlená pre prípad jednorozmernej úlohy. Pre dvojrozmernú úlohu

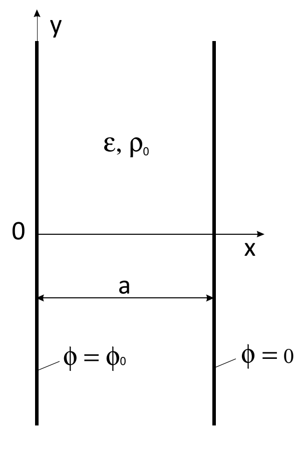
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{0.15}$$

možno odvodenie matíc všeobecného elektrostatického prvku Galerkinovou metódou nájsť napr. v [1].

Numerické riešenie úloh elektrostatiky ukážeme na nasledujúcich jednoduchých príkladoch, ktoré možno porovnať s analytickými riešeniami. Problémy reálnej technickej praxe sa riešia rovnakými postupmi, len prácnosť zadávania úlohy je väčšia.

Príklad 24.1

Dve rozmerné (teoreticky nekonečne veľké) rovnobežné vodivé dosky sú od seba vzdialené o



$a = 0.1$ m podľa obrázku. Jedna doska má konštantný potenciál $\phi_0 = 100$ V a druhá doska je uzemnená. Nemagnetická látka medzi doskami má relatívnu permitivitu $\varepsilon_r = 1$ a objemovú hustotou náboja $\rho_0 = 10^{-6}$ C/m^3. Určte elektrický potenciál a intenzitu elektrického poľa v oblasti medzi doskami.

Analytické riešenie

Pretože je zrejmé, že priebeh potenciálu v oblasti medzi doskami sa v smere osi *y* a *z* nemení, je jeho priebeh definovaný jednorozmerným tvarom rovnice (0.14)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \qquad \text{a)}$$

kde ε_0 je permitivita vákua a okrajové podmienky sú

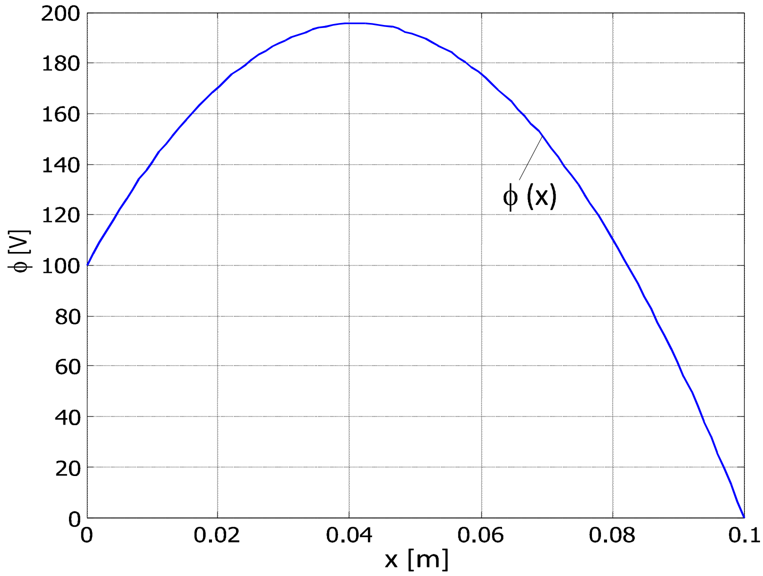
$$\phi(0) = \phi_0$$
$$\phi(\mathrm{a}) = 0$$

Dvojnásobnou integráciou (a) a uplatnením okrajových podmienok dostávame

$$\phi(x) = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} x^2 + \left(\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} - \frac{\phi_0}{a} \right) x + \phi_0 \qquad \text{(b)}$$

Priebeh potenciálu medzi doskami možno graficky znázorniť napr. pomocou programu Matlab

```
a=0.1; ro=10^-6; fi0=100; eps0=8.854*10^-12;
x=linspace(0,0.1,100);
y=-ro/2/eps0*x.^2+(ro/2/eps0*a-fi0/a).*x+fi0
plot(x,y)
```



Z rovnice (0.10) a (b) dostaneme funkciu absolútnej hodnoty vektora intenzity elektrického poľa s lineárnym priebehom medzi doskami

$$E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} x - \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} \tag{c}$$

a okrajovými hodnotami

$$\text{E (0)} = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} = -\frac{10^{-6} \cdot 0{,}1}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} + \frac{0.1}{100} = -4650 \text{ V/m}$$

$$\text{E (0.1)} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} 0.1 - \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\phi_0}{a} = \frac{10^{-6} \cdot 0{,}1}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} + \frac{0.1}{100} = 6650 \text{ V/m}$$

<u>Numerické riešenie</u>

Numerické riešenie príkladu sme sme vykonali v interaktívnom móde programu Ansys s touto postupnosťou príkazov:

1) *Zjednodušenie interakcie s programom zadaním typu úlohy*
Preferences, Electric, OK;

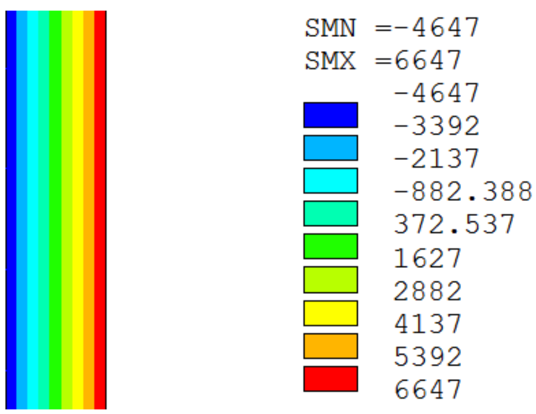
2) *Voľba prvku*
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Electrostatic, 2D Quad 121, OK, Close;

3) *Zadanie permitivity prostredia*
Material Props,Material Models, Electromagnetics, Relative Permittivity, Constant, PERX=1, OK, Material, Exit;

4) *Vytvorenie oblasti a siete prvkov medzi doskami*
Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=0.1, Y1=0, Y2=1, OK;
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, NDIV=10, OK;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;

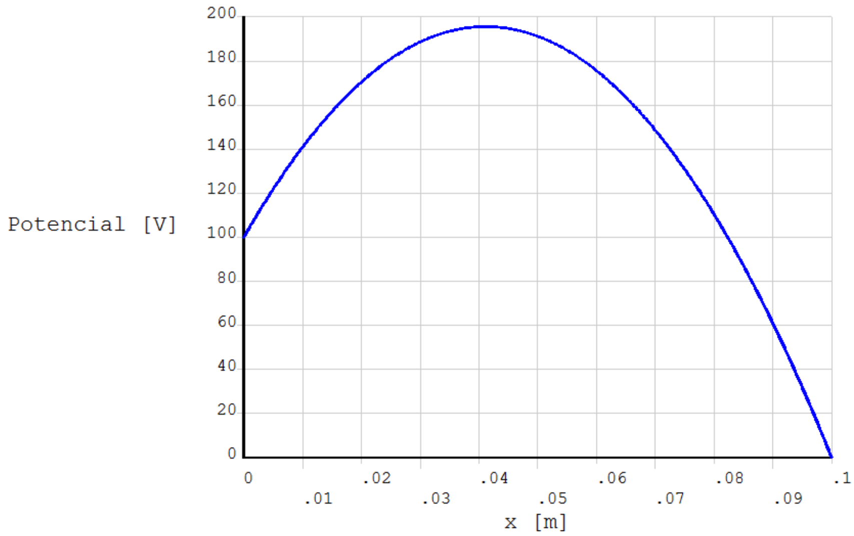
5) *Zadanie okrajových podmienok, hustoty náboja a príkazu na výpočet*
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Boundary, Voltage, On Lines, Kliknite ľavú zvislú stranu obdĺžnika, Apply, VALUE=100, Apply, , Kliknite pravú zvislú stranu obdĺžnika, OK, VALUE=0, OK;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Exitation, Charge Density, On Areas, Pick All, VAL1=1e-6, OK;
Solve, Current LS, OK;

6) *Zobrazenie priebehu intenzity elektrického poľa pomocou farebnej škály*
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Electric Field, X-Component of electric field, OK;



7) *Vytvorenie trasy uzlov pre grafické zobrazenie výsledkov na tejto trase (čiare)*
Utility Menu, Plot, Nodes, Zväčšite niektorý z hustých vodorovných radov uzlov;
General Postproc, Path Operations, Define Path, By Nodes, Kliknite prvý a posledný uzol zvoleného radu, OK, Name=cesta, OK;

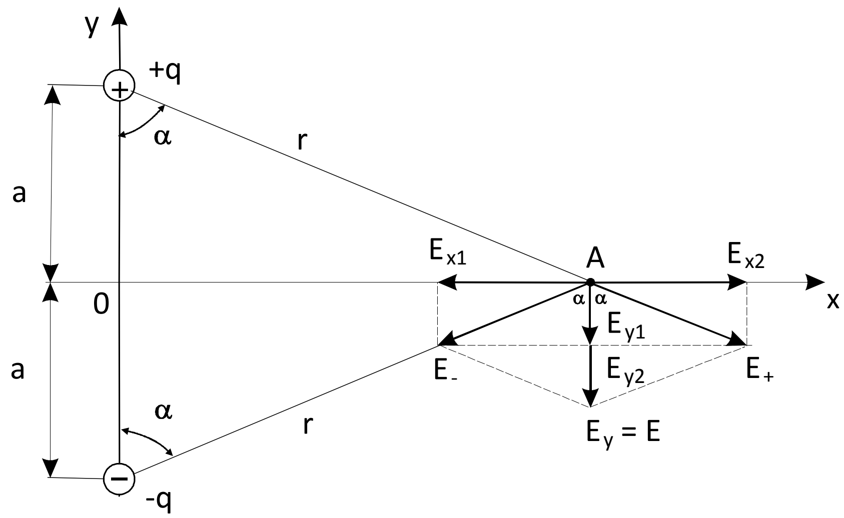
8) *Načítanie hodnôt potenciálu a ich grafické zobrazenie na uzlovej trase*
General Postproc, Path Operations, Map onto Path, Lab=Potenc, Dof Solution, Elec poten VOLT, OK;
General Postproc, Path Operations, Plot Path Item, On Graph, Lab=Potenc, OK;



Dobrá zhoda s analytickým riešením je zrejmá.

Príklad 24.2

Dva dlhé tenké rovnobežné priamkové drôty nesú rovnako veľký statický náboj opačného znamienka s hustotou +q a -q o veľkosti 10^{-6} C/m. Drôty sú vo vákuu vzdialené od seba o $2a$ podľa obrázku. Určte a nakreslite priebeh intenzity elektrického poľa na osi x v okolí nábojov, keď $a = 10$ cm.



Analytické riešenie

Obrázok predstavuje rez rovinou kolmou na drôty, pričom pri veľkej dĺžke drôtov môžeme úlohu riešiť ako rovinnú (s jednotkovou dĺžkou drôtu) a prierez tenkého drôtu považovať za bod. Pri uvedenej voľbe súradnicového systému je úloha symetrická voči rovine *yz* a stačí riešiť len oblasť napravo od tejto roviny.

Intenzita elektrického poľa v každom bode kolmého rezu na drôt (v rovine *xy*) je vektor, ktorého nositeľka prechádza cez prierez drôtu a bod, v ktorom určujeme intenzitu poľa. Zmysel vektora pri kladnom náboji je od prierezu a pri zápornom naopak. Pre absolútnu veľkosť vektora vo vákuu platí [2]

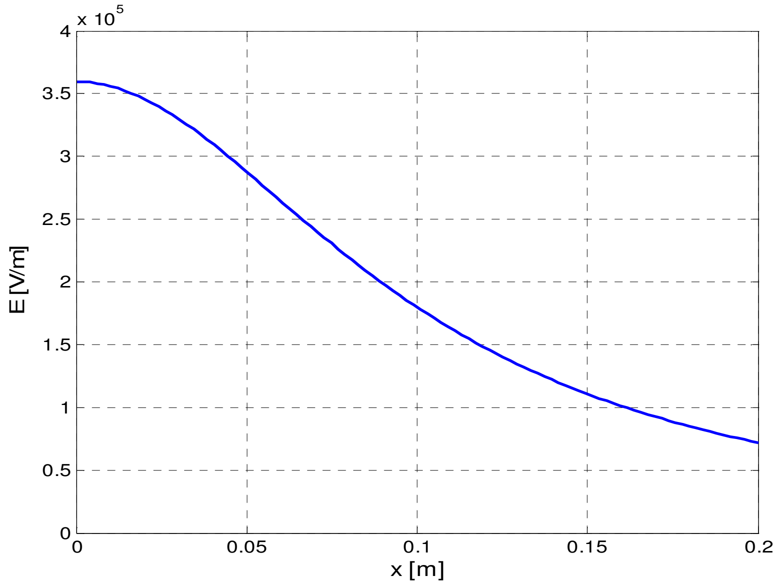
$$E_+ = E_- = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r} = k\frac{|q|}{r} \qquad \text{(a)}$$

kde ε_0 je permitivita vákua a *r* je vzdialenosť bodu od náboja. Ako vidieť, výslednica oboch vektorov v bode A má nulovú zložku v smere osi x a jej y-ová zložka, ktorá je na osi *x* aj výslednou absolútnou hodnotou intenzity poľa, je

$$E = E_y = E_{y1} + E_{y2} = 2E_{y1} = 2E_+\cos\alpha = 2k\frac{q}{r}\cos\alpha = 2k\frac{q}{r}\frac{a}{r} = \frac{qa}{\pi\varepsilon_0\left(a^2 + x^2\right)}$$

Pribeh intenzity na osi *x* v intervale 0 až 0.2 m možno graficky znázorniť napr. pomocou programu Matlab

```
a=0.1; q=10^-6; eps0=8.854*10^-12;
x=linspace(0,0.2,100);
E=q*a./(3.14*eps0*(a^2+x.^2));
plot(x,E)
```



Numerické riešenie

Numerické riešenie príkladu sme sme vykonali v interaktívnom móde programu Ansys s touto postupnosťou príkazov:

1. *Zjednodušenie voľby príkazov zadaním typu úlohy*
Preferences, Electric, OK;

2. *Voľba prvkov*
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Electrostatic, Infinite Boundary, 2D Inf Quad 110, OK, Options, K1=Volt(charge), OK, Add, Electrostatic, 2D Quad 121, OK, Close;

3. *Zadanie permitivity prostredia*
Material Props,Material Models, Electromagnetics, Relative Permittivity, Constant, PERX=1,
OK, Material, Exit;

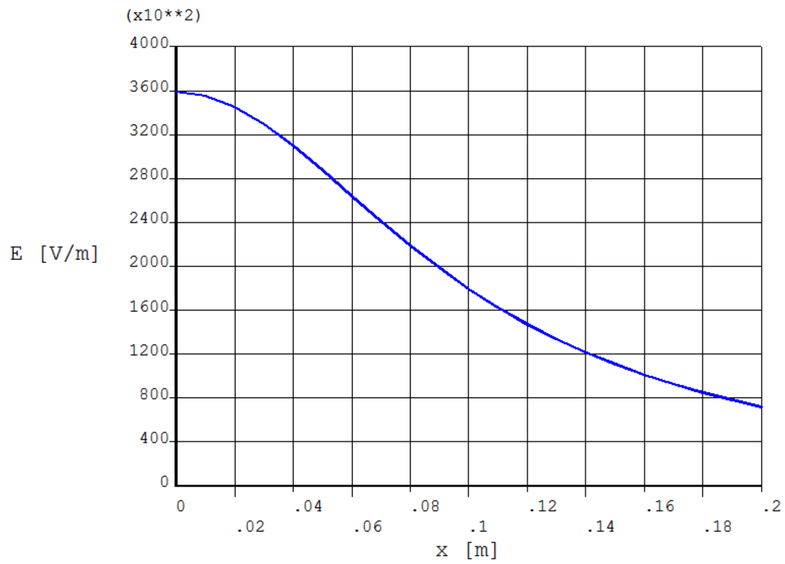
4. *Vytvorenie plošných oblastí*
Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1=0.1, THETA1=-90, THETA2=90, Apply,RAD1=0.2, Apply, RAD1=0.3, OK;
Operate, Booleans, Overlap, Areas, Pick All;

5. Rozdelenie plôch (aby sme mali čiary na osi x pre zobrazenie priebehu intenzity el. poľa)
Utility Menu, WorkPlane, Offset WP by Increments, Nastavte Degrees na 90, Kliknite X- ;
Operate, Booleans, Divide, Area by WrkPlane, PickAll;

6. Vytvorenie siete prvkov
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, All Lines, NDIV=10, OK, Picked Lines, Kliknite tri rovné čiary vonkajšieho polprstenca, OK, NDIV=1;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, *Kliknite dve plochy vonkajšieho polprstenca*,OK;
Mesh Attributes, Default Attribs, TYPE=2 Plane 121, OK;
Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, *Kliknite zvyšné plochy*, OK;

7. Zadanie elektrických nábojov, okrajovej podmienky a spustenie výpočtu
Plot, Lines;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Exitation, Charge, On Keypoints, Kliknite horný bod na najmenšej polkružnici, Apply, VALUE=0.5e-6, Apply, *Kliknite dolný bod na najmenšej polkružnici*, OK, VALUE=-0.5e-6, OK;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Flag, Infinite Surf, On Lines, *Kliknite dve vonkajšie zakrivené čiary najväčšej polkružnice*, OK;
Solution, Solve, Current LS, (Varovanie označte Yes);

8. *Nakreslenie priebehu intenzity elektrického poľa pozdĺž osi* x
General Postproc, Path Operations, Define Path, By Nodes, Kliknite prvý a posledný uzol, OK, Name=cesta, nDiv=50, OK;
General Postproc, Path Operations, Map onto Path, Flux & gradient, EFSUM, OK;
General Postproc, Path Operations, Plot Path Item, On Graph, EFSUM, OK;



Výsledný priebeh a hodnoty sa dostatočne presne zhodujú s analytickým riešením.

Príklad 24.3

Vo voľnom priestore (vákuu) je umiestnená elektricky nabitá guľa s priemerom 1 cm a nábojom 1 nC. Určte rozloženie potenciálu a intenzity elektrického poľa v jej okolí a ich veľkosť na polomere 0,5 a 2 cm. Úlohu riešte analyticky a tiež numericky.

A) <u>Analytické riešenie</u>

Ak do voľného priestoru s permitivitou ε [F/m] umiestnime bodový náboj o veľkosti Q [C], potom veľkosť intenzity tzv. radiálneho elektrického poľa na polomere r možno určiť z Coulombovho zákona

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2} \quad [\text{V/m}] \tag{0.16}$$

Pre hodnoty elektrického potenciálu v okolí náboja platí

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r} \quad [\text{V}] \tag{0.17}$$

a, ako vidieť, nulový potenciál (okrajová podmienka) je v nekonečne vzdialených bodoch.

Vzťahy (0.16) a (0.17) platia aj pre guľu s nábojom Q a polomerom R v intervale $R \le r \le \infty$. Veľkosť intenzity elektrického poľa a potenciálu v radiálnej vzdialenosti 0,005 a 0,02 m potom v našom príklade je

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.005^2} = 359504 \text{ V/m}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.005} = 1796 \text{ V}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.02^2} = 22469 \text{ V/m}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}854188\cdot 10^{-12}\cdot 0.02} = 449\ \text{V}$$

Pre potreby numerického výpočtu vyčíslime ešte plošnú hustotu elektrického náboja na povrchu gule

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{10^{-9}}{4\pi r^2} = \frac{10^{-9}}{4\pi\cdot 0{,}005^2} = 0{,}31831\cdot 10^{-5}\ \text{C/m}^2$$

B) *<u>Numerické riešenie</u>*

Veľkosť a poloha elektrického náboja sa vo vyšetrovanej oblasti s časom nemení, takže vytvára vo svojom okolí len statické (stacionárne) elektrické pole charakterizované vektorom intenzity elektrického poľa $\mathbf{E}$. Program numericky vyrieši rovnicu (0.14) s primárnou neznámou $\phi(x,y,z)$ vo forme aproximačných funkcií na prvkoch. Z nich sa potom určuje intenzita elektrického poľa podľa (0.10).

Napriek tomu, že je príklad jednoduchý, nevyhneme sa niektorým problémom spojených s numerickou analýzou vlastností a účinku elektromagnetických polí: Modelovať treba vo všeobecnosti priestorové oblasti, okrajové podmienky sa často zadávajú pre vzdialené body, pričom oblasť záujmu treba deliť podrobne, lebo hľadané premenné sa menia nelineárne.

Úlohu sme vyriešili pomocou programu Ansys v interaktívnom móde s touto postupnosťou príkazov:

1. *Zjednodušenie voľby príkazov zadaním typu úlohy*
Ansys Main Menu, Preferences, Electric, OK;

2. *Voľba potrebných prvkov a ich charakteristík*
Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Electrostatic, 3D Tet 123, Apply, Not Solved, Mesh Facet 200, Apply, Infinite Boundary, 3D Inf Brick 111, OK, *Vyznačte* Type 2 MESH200, Options, K1 = TRIA 6-NODE, OK, *Vyznačte* TYPE 3 INFIN111, Options, K1 = VOLT (Charge), K2 = 20-Noded Brick, OK, Close;

3. *Zadanie permitivity prostredia*
Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permittivity, Constant, PERX = 1, OK, Material, Exit;

4. *Vytvorenie tvoriacej plochy oblasti, kde nás zaujímajú výsledky*
Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1 = 0.02, RAD2 = 0.005, Theta1 = -90, Theta2 = 90, OK;

5. *Určenie hustoty delenia oblati*
Meshing, Size Cntrls, ManualSize, Lines, Picked Lines, *Kliknite zvislé strany medzikružia*, Apply, NDIV = 30, Apply, *Kliknite oblúky*, OK, NDIV = 60, OK;

6. *Vytvorenie priestorovej oblasti. Vzhľadom na symetriu sa tvorí len jej výsek*
Modeling, Operate, Extrude, Areas, About Axis, PickAll, *Kliknite dva rozdielne body na osi Y*, OK, ARC = 30, NSEG = 1, OK;

7. *Vytvorenie siete elektrostatických prvkov*
Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, 1 SOLID123, OK;
Meshing, Mesh, Volumes, Free, PickAll;

8. *Vytvorenie pomocných plošných prvkov na vonkajšom obvode oblasti. Je to príprava na tvorbu INFIN prvkov, ktoré nám nahradia delenie nezaujímavej oblasti do veľkej (teoreticky nekonečnej) vzdialenosti s nulovým potenciálom*

Utility Menu, Select, Entities, Areas, Apply, *Kliknite vonkajšiu plochu oblasti*, OK;
Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, 2 MESH200, OK;
Meshing, Mesh, Areas, Free, PickAll;

9. *Vytvorenie INFIN prvkov*

Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, 3 INFIN111, OK;
Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, NDIV = 1,OK;
Utility Menu, WorkPlane, Change Active CS to, Global Spherical;
Modeling, Operate, Extrude, Areas, By XYZ Offset, PickAll, DX = 0.02, OK;

10. Utility Menu, Select, Everything;
11. Utility Menu, Plot, Lines;

12. *Zadanie okrajovej podmienky (nulový potenciál pomocou INFIN prvkov)*

Solution, Define Loads, Apply, Electric, Flag, Infinite Surf, On Areas, *Kliknite vonkajšiu zakrivenú plochu oblasti*, OK;

13. *Zadanie hustoty plošného elektrického toku náboja na vyšetrovanú oblasť*

Utility Menu, Select, Entities, Nodes, By Location, Xcoordinates, 0.005, Apply;
Utility Menu, Select, Entities, Elements, Attached to, Nodes, OK;
Solution, Define Loads, Apply, Electric, Excitation, Surf Chrg Den, On Nodes, PickAll, Value = 3.1831e-6,OK;

14. Utility Menu, Select, Everything;
15. Utility Menu, WorkPlane, Change Active CS to, Global Cartesian;

16. *Výpočet*

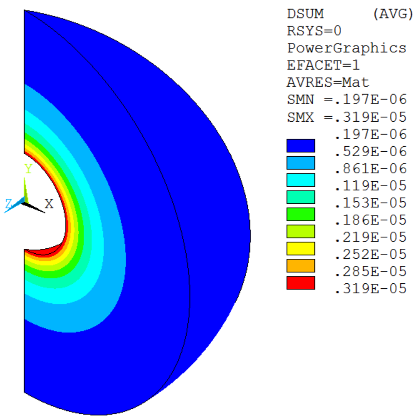
Solve, Current LS, OK; *Zvoľte na upozornenia yes.*

17. *Odstránenie oblasti s INFIN prvkami*

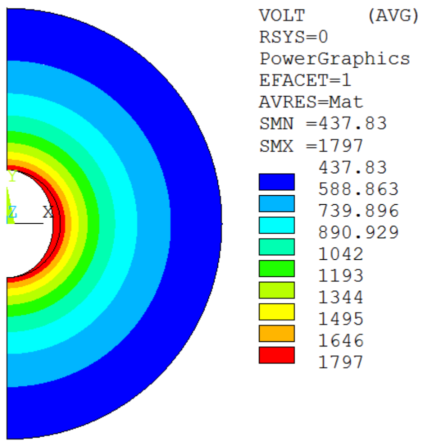
Utility Menu, Plot, Volumes;
Utility Menu, Select, Entities, Volumes, By Num Pick, Aplly, *Kliknite vonkajší pomocný objem s INFIN prvkami*, Ok, Elements, Attached to, Volumes, Unselect, OK;

18. *Kontrola zadanej plošnej hustoty elektrického toku na povrchu gule* [C/m^2]

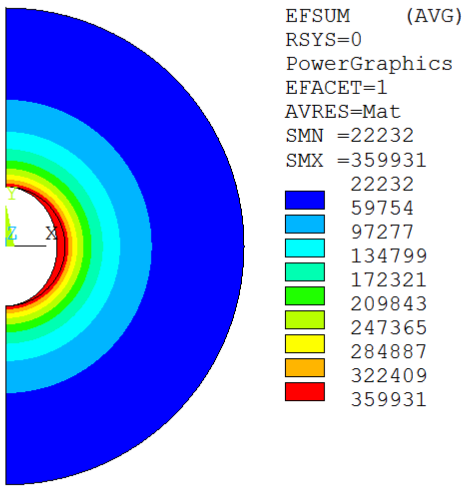
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Electric Flux Density, Electric flux density vector sum, OK;



19. *Vykreslenie potenciálu* [V] (0,005 m $\le r \le$ 0,02 m)
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, DOF Solution, Electric potential, OK;



20. *Vykreslenie intenzity elektrického poľa* [V/m], (0,005 m $\le r \le$ 0,02 m)
General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Electric Field, Electric field vector sum, OK;



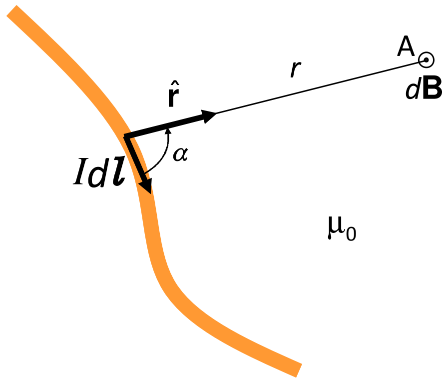
Výsledky dostatočne presne súhlasia s analytickým riešením.

24.2 Stacionárne magnetické pole

Zdrojom *stacionárneho* magnetického poľa sú nepohyblivé vodiče ustáleného jednosmerného elektrického prúdu a nepohybujúce sa permanentné magnety. Pre výpočtársku analýzu účinkov magnetického poľa v technických aplikáciách má prvoradý význam určenie vektorového poľa magnetickej indukcie **B** a z neho odvodených veličín, vrátane silových účinkov. Na jeho určenie možno využiť viaceré postupy vychádzajúce zo základných zákonov teórie magnetického poľa. Sú to predovšetkým:

a) Biotov-Savartov zákon, ktorý umožňuje počítať magnetickú indukciu **B** elektrických prúdov, ktoré tečú v objeme *V* s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$ alebo v okolí prúdovodičov, cez ktorých prierez tečie prúd o veľkosti I .
Pre magnetické pole v okolí vodiča možno diferenciálny prírastok vektora magnetickej indukcie (pozri obr. 24.1) vypočítať zo vzťahu

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{0.18}$$



Obr. 24.1

kde $\mathbf{B}$ [T, Wb/m^2, kg/(s^{2}A)) je vektor magnetickej indukcie (hustoty magnetického toku), I je elektrický prúd [A], $d\boldsymbol{l}$ je elementárna vektorová dĺžka vodiča orientovaná v smere prúdu, $\hat{\mathbf{r}}$ je jednotkový vektor udávajúci smerovanie vzdialenosti r od elementu po vyšetrovaný bod a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [T·m/A] je permeabilita vákua (magnetická konštanta). Permeabilita vzduchu sa len nepatrne líši od permeability vákua a možno v bežných výpočtoch zaviesť $\mu_{vzduchu} = \mu_0$ a $\mu_r^{vzduchu} = 1$.

Vektor $d\mathbf{B}$, ako vyplýva z definície vektorového súčinu, je kolmý na rovinu preloženú cez nositeľky vektorov $d\boldsymbol{l}$ a $\hat{\mathbf{r}}$ a jeho zmysel určuje pravidlo pravej ruky. (Pri situácii podľa obrázku bude vektor vychádzať z uvedenej roviny smerom k pozorovateľovi.)
Magnetickú indukciu v okolí vodiča prúdu s dĺžkou L dostaneme ako integrálny súčet elementárnych hodnôt tohto vektora po celej dĺžke vodiča

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\boldsymbol{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{0.19}$$

b) Ampérov zákon celkového (obopnutého) prúdu, podľa ktorého krivkový integrál magnetickej indukcie **B** po ľubovoľnej uzavretej orientovanej krivke L je priamo úmerný celkovému elektrickému prúdu I_{celk}, ktorý tečie cez ľubovoľný povrch *S* ohraničený touto krivkou

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{celk} \tag{0.20}$$

resp. v bežných prípadoch bez prúdu zviazaného s materiálom vyšetrovanej oblasti

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{l} = I_{volny} \tag{0.21}$$

c) *Využitie magnetického vektorového potenciálu.* Ak elektrický prúd I tečie uzavretým prúdovodičom L malého prierezu s konštantnou prúdovou hustotou $\mathbf{J}$, potom na prúdovodiči možno voliť prúdové elementy $Id\boldsymbol{l} = \mathbf{J}dV$ a pre vektorový magnetický potenciál platí

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L \frac{d\boldsymbol{l}}{r} \tag{0.22}$$

kde *r* je vzdialenosť vyšetrovaného bodu od dĺžkového elementu.

Magnetickú indukciu možno pomocou magnetického potenciálu vyjadriť v tvare

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{0.23}$$

pretože takto definovaná indukcia vždy spĺňa zákon spojitosti indukčného toku (24.2)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{0.24}$$

Ampérov zákon (0.4) pre časovo nezávislé magnetické pole je

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{0.25}$$

a keď do tejto rovnice dosadíme z (24.6) a (0.23), s predpokladom závislosti permeability materiálu od magnetickej indukcie, dostaneme výsledný vzťah pre určenie magnetického potenciálu

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu(\mathbf{B})} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \tag{0.26}$$

Po určení magnetického potenciálu vhodnou numericku metódov (program Ansys využíva MKP), magnetická indukcia vo vyšetrovanej oblasti sa vypočíta z (0.23). Poznamenávame, že pri rovinnej úlohe v súradnicovej rovine *xy* má vektor magnetického potenciálu nenulovú zložku len v smere osi z a rieši sa diferenciálna rovnica len s touto jednou neznámou.

d) *Využitie magnetického skalárneho potenciálu.* Ak vo vyšetrovanej oblasti nie je žiadny prúdový vodič (napr. v oblasti len s permanentnými magnetmi) , t.j. platí $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, potom sa rovnica (0.25) zmení na

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{0.27}$$

a v oblasti môžme zaviesť analogicky s elektrostatikou skalárny magnetický potenciál ψ, pre ktorý platí

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \tag{0.28}$$

Formuláciu priestorovej úlohy potom možno previesť na diferenciálnu rovnicu s jedinou neznámou funkciou ψ a po jej (numerickom) určení cez rovnicu (0.28) a materiálové vzťahy $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ skompletovať analýzu oblasti. Je to pri porovnaní s metódou magnetického potenciálu výhodnejší postup, pretože vtedy pri priestorovej úlohe treba riešiť tri diferenciálne rovnice s tromi neznámymi zložkami vektora $\mathbf{A}$.

Pre oblasti s prúdovými vodičmi možno použiť metódu *redukovaného skalárneho potenciálu*. V tomto prípade sa vektor intenzity magnetického poľa rozkladá na dve zložky

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + \mathbf{H}_m \tag{0.29}$$

Vektor $\mathbf{H}_m$ spĺňa podmienku (0.27) a možno ho vyjadriť pomocou skalárneho potenciálu ψ_r, ktorý však vzhľadom na to, že nereprezentuje kompletné pole $\mathbf{H}$, sa nazýva redukovaný skalárny potenciál

$$\mathbf{H}_m = -\nabla \psi_r \tag{0.30}$$

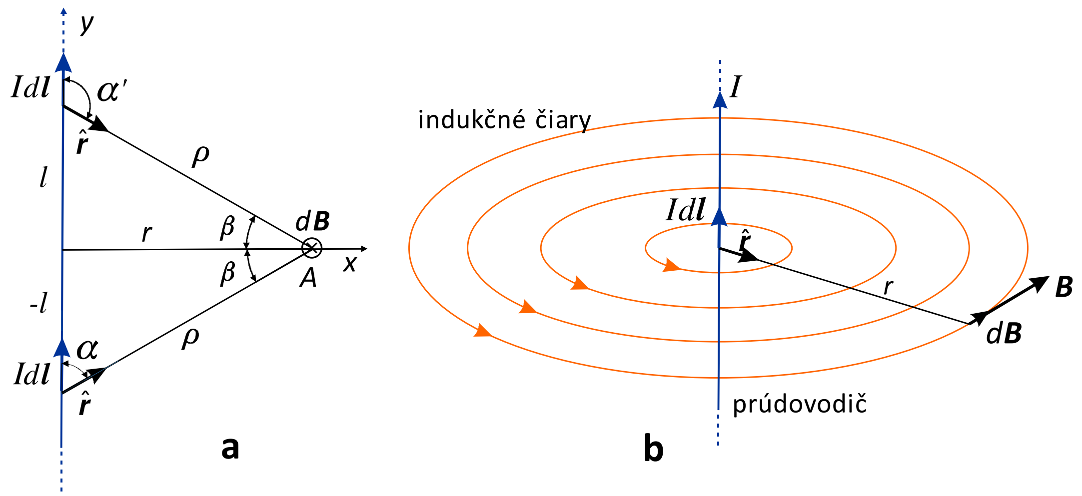
Prvý člen v (0.29) vyjadruje pole prúdovodičov a určuje sa obyčajne analyticky pomocou Biot-Savartovho zákona. To má v MKP výhodu, že možno v riešenej oblasti využiť jednoduché zdrojové prúdovodičové priestorové prvky magnetického poľa (napr. prvok SORC36 v Ansyse), na druhej strane kombinácia analyticky určeného poľa $\mathbf{H}_c$ s numericky určeným poľom $\mathbf{H}_m$

vyžaduje pri rôznych kombináciách a rôznej intenzite oboch polí špeciálne numerické procedúry na zabezpečenie vyhovujúcej presnosti výsledkov.

24.3 Magnetické pole v okolí prúdovodičov a cievok

So spôsobom využívania metód uvedených v predchádzajúcej časti i s charakteristickými črtami magnetickej indukcie v okolí prúdovodičov a cievok je užitočné zoznámiť sa pomocou jednoduchých analytických a numerických príkladov.

Najprv uvedieme klasický príklad využitia Biotovho-Savartovho a Ampérovho zákona pri určení veľkosti a smeru magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ v okolí nekonečne dlhého priameho tenkého prúdovodiča, v ktorom tečie stály prúd I (obr 24.2). Ak cez takýto prúdovodič a zvolený vyšetrovaný bod A s kolmou radiálnou vzdialenosťou r od vodiča preložíme súradnicovú rovinu xy (obr. 24.2a), tak je zrejmé, že úloha je osovosymetrická, pretože všetky takto zvolené roviny s takto zvoleným bodom A sú rovnocenné. Vzhľadom na nekonečnú dĺžku vodiča sa situácia nemení pri ani posúvaní bodu v smere osi y, a teda stačí situáciu riešiť v jedinej rovine kolmej na vodič, pretože v ostatných takto zvolených rovinách by sme dostali identické výsledky. Z hľadiska riešenia ide teda o rovinnú rotačne symetrickú úlohu, čo je užitočné vedieť pri globálnom vyhodnotení výsledkov a, samozrejme, aj pri zádavaní úlohy do programu pri numerickom riešení.



Obr. 24.2

Kvôli zjednodušeniu výpočtu zvolíme na vodiči vo vzdialenostiach $\pm l$ dva prúdové elementy Idl v rovnakej vzdialenosti ρ od bodu A. Vektorový príspevok $d\mathbf{B}_1$ od spodného prúdového elementu podľa (0.18) je

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{\rho^2}$$

a z dôvodov symetrie príspevok od horného je rovnaký. Podľa pravidla pravotočivej skrutky oba vektory smerujú za nákresňu, takže pre absolútnu hodnotu prírastku vektora indukcie v bode A platí

$$dB = 2dB_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Idl\cos\beta}{\rho^2} \tag{a}$$

Takéto elementárne hodnoty indukcie treba spočítať (zintegrovať) pre l od 0 po ∞, čo možno nahradiť výhodnejším intervalom od 0 po $\pi/2$ pre uhol β. Pre diferenciál dĺžky l platí

$$dl = d(r\, tg\beta) = \frac{r\, d\beta}{\cos^2 \beta}$$

a po dosadení spolu s $\rho = r/\cos\beta$ do (a) dostávame

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos\beta\, d\beta$$

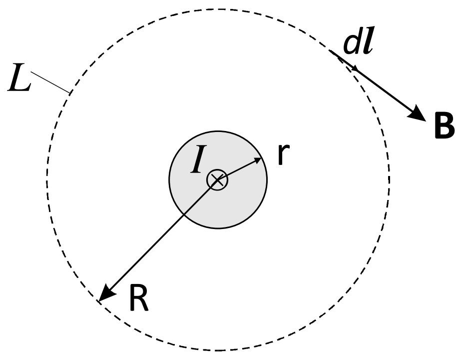
Prírastok indukcie už závisí len od β a po jeho integrácii dostávame

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{\pi/2} \cos\beta\, d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{0.31}$$

Výsledok potvrdzuje rotačnú symetriu úlohy, vektor **B** má na kružnici s polomerom r konštantnú hodnotu, tangenciálny smer a leží v rovine kolmej na prúdovodič (pozri obr. 24.2b). Sústredené kružnice okolo prúdovodiča sú indukčné čiary.

Príklad 24.4

Určte magnetickú indukciu v okolí i vo vnútri nekonečne dlhého prúdovodiča kruhového prierezu s polomerom r = 0,5 cm. Vodičom preteká prúd rovnomerne rozdelený po prierezе o veľkosti 100 A v smere do nákresne xy (obr. 24.3). Úlohu riešte analyticky i numericky.



Obr. 24.3

Na analytické riešenie úlohy využijeme Ampérov zákon celkového prúdu (0.20)

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{celk} \tag{a}$$

Pretože prierez vodiča je osovo symetrický, dá sa predpokladať, aj bez vedomostí z predchádzajúceho príkladu, že indukčné čiary budú tiež osovo symetrické kružnice. Je preto výhodné zvoliť orientovanú uzavretú krivku L v tvare symetrickej kružnice, pretože k indukčnej čiare má vektor **B** vždy tangenciálny smer. Potom integrál skalárneho súčinu na ľavej strane rovnice (a) je BL a pre $R \geq r$ dostávame výslednú absolútnu hodnotu indukcie

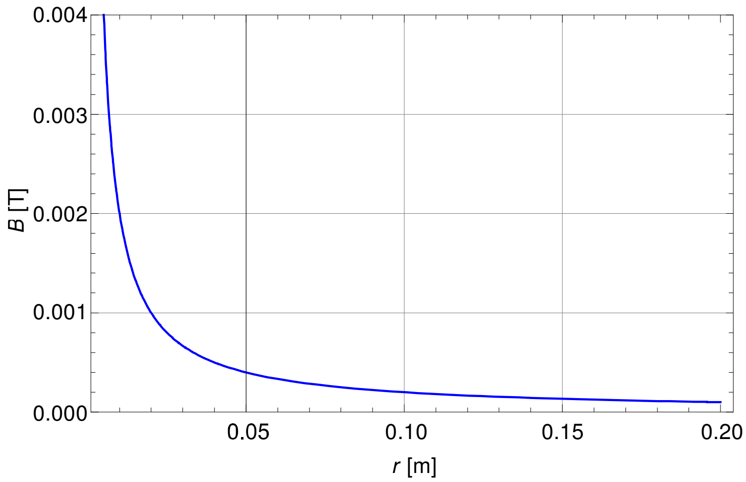
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{L} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{0.32}$$

Je to rovnaký výsledok, ako sme dostali pre tenký vodič (0.31) a možno povedať, že magnetické pole v okolí vodiča s kruhovým prierezom je také, ako keby celý prúd bol sústredený v strede prierezu.

Pre zvolené hodnoty maximálna hodnota indukcie je na povrchu prúdovodiča $r = R$

$$B_{\max} = B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2\pi \cdot 0{,}005} = 0{,}004 \text{ T}$$

a podľa (0.32) od $r = 0{,}005$ m asymptoticky klesá k nule:



Teraz využijeme Ampérov zákon celkového prúdu pre určenie magnetického poľa v priereze prúdovodiča, t.j. pre $r \le R$. Pre magnetickú indukciu opäť platí (0.32), ale prúd vo vnútri kružnice je teraz už len časťou celkového prúdu I. Pri predpoklade rovnomerného rozdelenia prúdu po priereze platí

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

čo dáva výsledok v tvare

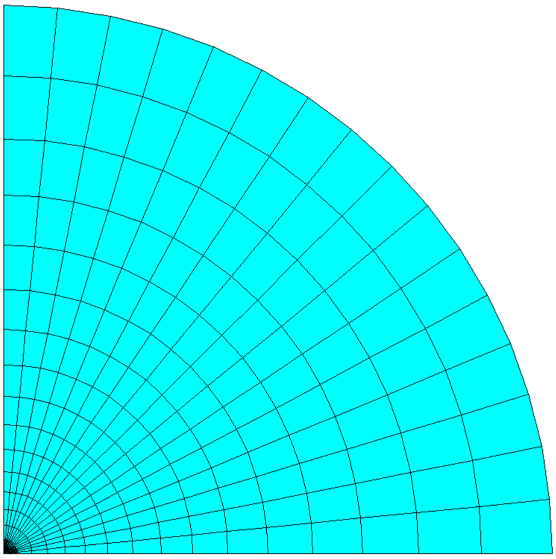
$$B(r) = \frac{\mu_0 I\, r}{2\pi R^2} \tag{0.33}$$

Vo vnútri vodiča teda magnetická indukcia lineárne narastá z nuly na hore uvedenú maximálnu hodnotu $B_{\max}$.

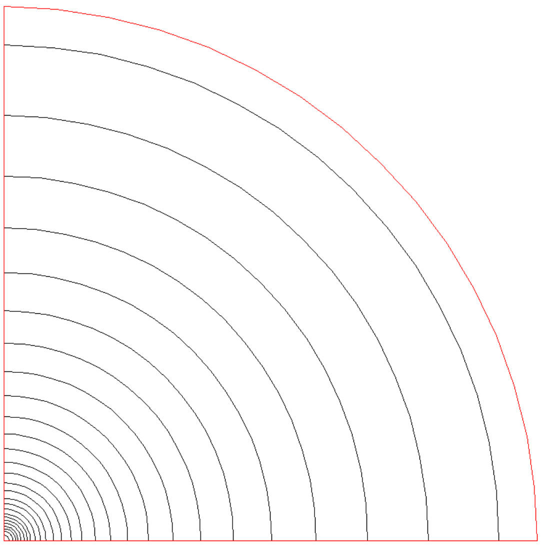
Numerické riešenie sme vykonali pomocou programu Ansys v interaktívnom móde s touto postupnosťou príkazov:

1. Preferences, Magnetic Nodal, OK;
2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Vector, Quad 8 node 53, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, OK, Material, Exit;
4. Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1=0.005, THETA2=90, Apply, RAD1=0.2, OK;
5. Operate, Booleans, Overlap, Areas, Pick All;

6. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, All Areas, SIZE=0.001, OK;
7. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Lines, Picked Lines, *Kliknite na dve rovné strany veľkého štvrťkruhu*, Apply, NDIV=15, SPACE=5, Apply, *Kliknite oblúk veľkého štvrťkruhu*, OK, NDIV=15, SPACE=0, OK;
8. Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, Pick All;

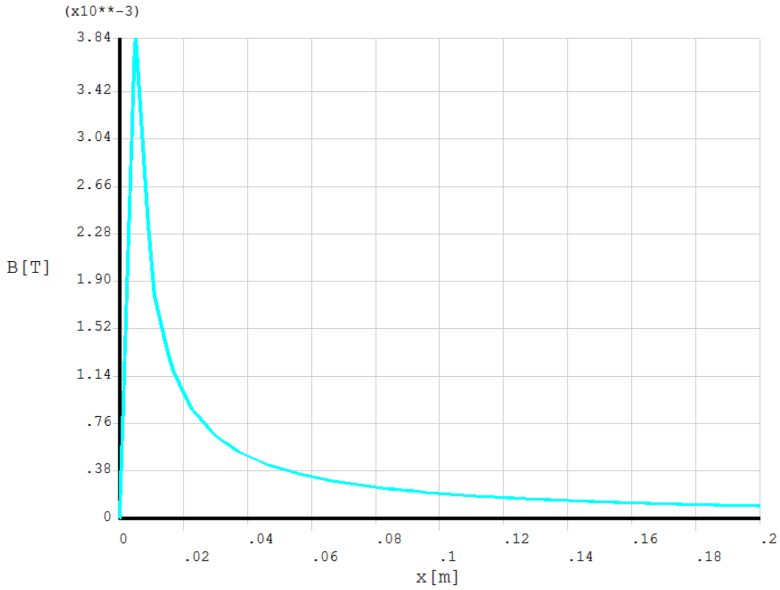


9. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Excitation, CurrDensity, On Areas, *Kliknite malý štvrťkruh*, OK, VAL3=100/3.14/0.005**2, OK;
10. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Boundary, Vector Poten, Flux Par'l, On Lines, *Kliknite vonkajší oblúk*, OK;
11. Solve, Current LS, OK;
12. General Postprocessor, Plot Results, Contour Plot, 2D Flux Lines, OK;



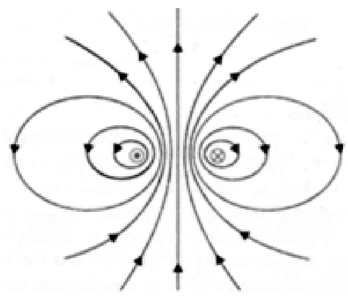
13. Utility Menu, Plot, Elements

14. General Postprocessor, Path Operations, Define Path, By Nodes, *Po zväčšení malého štvrťkruhu kliknite na osi x prvý uzol, potom uzol na konci malého štvrťkruhu a potom úplne posledný uzol,* OK, Name=cesta, nDiv=100, OK;
15. Map onto Path, Flux & gradient, BSUM, OK;
16. Plot Path Item, On Graph, BSUM, OK;



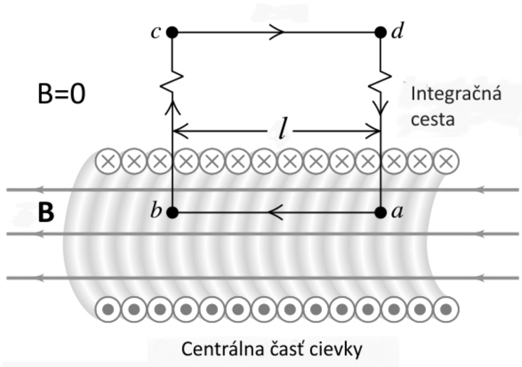
Priebeh magntickej indukcie je v dobrej zhode s analytickým riešením.

Pokiaľ sa na prúdovodiči urobí slučka približne do tvaru kružnice, vo vnútri slučky dôjde ku koncentrácii magnetického poľa (obr. 24.4). Efekt zosilnie pri vytvorení viacero závitov do tvaru cievky o určitej dĺžke, ktorá môže obsahovať aj viaceré vrstvy závitov navinutých na sebe. Teoreticky si možno predstaviť aj nekonečne dlhú cievku s jednou vrstvou závitov



Obr. 24.4 *Koncentrácia magnetického poľa vo vnútri slučky prúdovodiča*

(nekonečne dlhý solenoid). Vo vnútri takejto cievky, vzhľadom na to, že magnetické siločiary idúce do nekonečna musia byť uzavreté, vznikne homogénne magnetické pole a na vonkajšej strane cievky je pole nulové (obr. 24.5).



Obr. 24.5 *Nekonečne dlhý solenoid*

Magnetickú indukciu takejto cievky možno jednoducho určiť pomocou Ampérovho zákona celkového prúdu, pretože pre výpočet integrálu $\oint \mathbf{B} d\boldsymbol{l}$ možno výhodne vybrať integračnú čiaru *abcd*, ktorá obopína nl závitov, kde *n* je počet závitov na jednotku dĺžky. Potom pre cievku, ktorej dĺžka je výrazne väčšia ako jej priemer platí

$$\oint_{abcd} \mathbf{B} d\boldsymbol{l} = Bl = \mu_0 n l I$$

a pre veľkosť magnetickej indukcie vo vnútri cievky mimo koncov dostávame jednoduchý vzťah

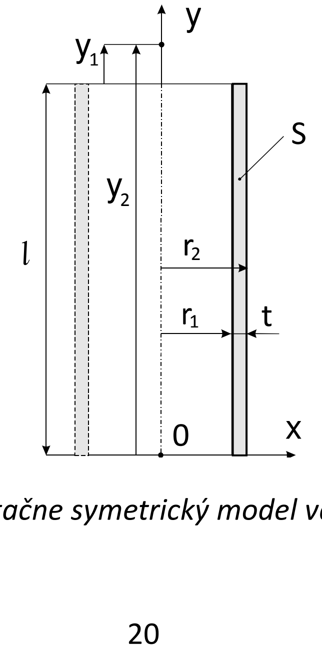
$$B = \mu_0 n I \tag{0.34}$$

ktorý nezávisí od priemeru cievky, čo sa pri nekonečne dlhej cievka dalo očakávať.

Pri numerickom riešení možno napr. husto vinutú valcovú cievku s celkovým počtom závitov N a jej magnetické pole analyzovať ako rotačne symetrickú úlohu (obr. 24.6). Pritom sa čistá aktívna plocha závitov v rezovej rovine *alikvótne* nahradzuje spojitou plochou S. Na takúto plochu treba zadať plošnú prúdovú hustotu určenú zo vzťahu

$$J = \frac{NI}{S} = \frac{NI}{tl} = \frac{nI}{t} \tag{0.35}$$

kde $n = N/l$ je počet závitov na jednotku dĺžky a I je veľkosť prúdu.



Obr. 24.6 *Rotačne symetrický model valcovej cievky*

Príklad 24.5

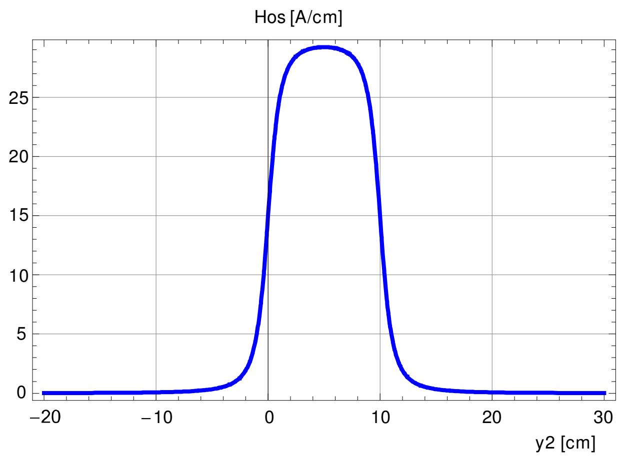
Pre husto vinutú cievku s dĺžkou l = 10 cm, vnútorným polomerom $r_1 = 1\,\text{cm}$ a čistou aktívnou prierezovou plochou drôtov $S = 300\ \text{mm}^2$ určte a nakreslite priebeh intenzity magnetického poľa H_{os} pozdĺž jej osi. Cievka má N = 30 závitov a preteká ňou prúd I = 10 A.

Ak na cievke zvolíme súradnicový systém podľa obr. 24.6, potom pre priebeh intenzity magnetického poľa na osi cievky platí [3]

$$H_{os} = \frac{B_{os}}{\mu_0} = \frac{nI}{2(r_2 - r_1)}\left[y_2 ln \frac{\sqrt{r_2^2 + y_2^2} + r_2}{\sqrt{r_1^2 + y_2^2} + r_1} - y_1 ln \frac{\sqrt{r_2^2 + y_1^2} + r_2}{\sqrt{r_1^2 + y_1^2} + r_1} \right] \tag{0.36}$$

kde v našom príklade je $t = S / l$= 300/100 = 3 mm, $r_2 = r_1 + t = 10 + 0{,}3 = 10{,}3$ cm a $n = N/l = 30$ závitov/(10 cm) $= 3$ závity/cm.

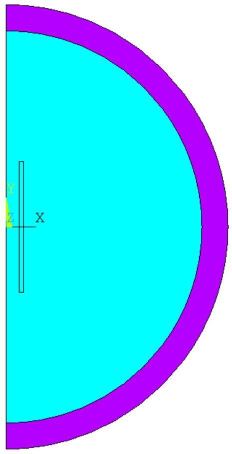
Priebeh H_{os} pozdĺž cievky so zadanými hodnotami (pri voľbe dĺžkovej jednotky cm) sme podľa vzťahu (0.36) znázornili na nasledujúcom obrázku



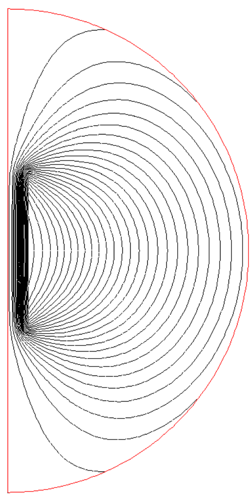
Maximálna hodnota v strede cievky ($y2 = l/2$, $y1 = -l/2$) je 29,23 A/cm.

Numericky sme úlohu riešili v programe Ansys týmto interaktívnym postupom:

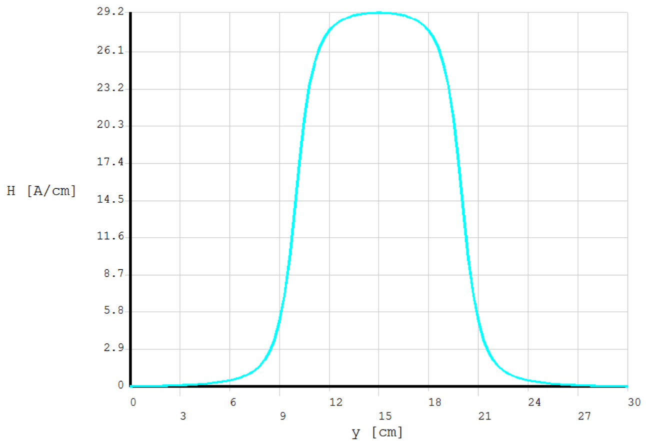
1. Preferences, Magnetic Nodal, OK;
2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Vector, Quad 8 node 53, OK, Options, K3=Axisymmetric, OK, Add, Infinite Boundary, 2D Inf Quad 110, OK, *Vyznačte* Type 2 INFIN110, Options, K2=8-noded Quad, K3=Axisymmetric, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, OK, Material, Exit;
4. *Cez príkazové okno programu zadajte tieto parametre*: L=10; r1=1; r2=1,3; i=10; N=30; S=3; J=N*i/S;
5. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=r1, X2=r2, Y1=-L/2, Y2=L/2, OK;
6. Modeling, Create, Areas, Circle, By Dimensions, RAD1=1.5*L, THETA1=-90, THETA2=90, Apply, RAD1=1.5*L+2, (*uhly bez zmeny*), OK;
7. Operate, Booleans, Overlap, Areas, Pick All;



8. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Areas, All Areas, SIZE=0.3, OK;
9. Mesh, Areas, Free, *Kliknite obdĺžnik a vnútorný polkruh*, OK;
10. Mesh Attributes, Default Attribs, TYPE=2 INFIN110, OK;
    Plot, Areas;
11. Size Controls, Manual Size, Lines, Picked Lines, *Kliknite dve zvislé koncové čiary vonkajšej polprstencovej plochy*, OK, NDIV=1, OK;
12. Mesh, Areas, Mapped, 3 or 4 sided, *Kliknite vonkajší* polprstenec, OK;
    Plot, Areas;
13. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Excitation, CurrDensity, On Areas, *Kliknite obdĺžnikovú plochu cievky*, OK, VAL3=J, OK;
14. Boundary, Vector Poten, On Lines, *Kliknite vonkajšiu čiaru polprstenca*, OK, AZ=0, OK;
15. Flag, Infinite Surf, On Lines, *Kliknite vonkajšiu čiaru polprstenca*, OK;
16. Solve, Current LS, OK;
    Plot, Elements;
17. General Postprocessor, Plot Results, Contour Plot, 2D Flux Lines, OK;



18. General Postprocessor, Path Operations, Define Path, By Nodes, *Kliknite od spodu prvý a posledný uzol vnútorného polkruhu na osi y*, OK, Name=cesta, nDiv=100, OK;
19. Map onto Path, Lab=Hos, Flux & gradient, HY, OK;
20. Plot Path Item, On Graph, Hos, OK;



Výsledok je v dobrej zhode s analytickým riešením.

24.4 Elektromagnet a jeho silové účinky

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali magnetickým poľom vo vákuu. Vzťah medzi intenzitou magnetického poľa $\mathbf{H}$ a magnetickou indukciou $\mathbf{B}$ je v takomto prípade jednoduchý

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{0.37}$$

kde μ_0 je permeabilita vákua ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m).

Je to priamo úmerný vzťah, resp. rovnica priamky, ktorá v diagrame B-H prechádza počiatkom a jej smernica je μ_0. Pretože permealita vzduchu sa len nepatrne líši od permeality vákua, možno pri bežných praktických výpočtoch tento vzťah využívať aj pri analýze magnetického poľa vo vzduchovom prostredí.

Podobný jednoduchý vzťah so skalárnou hodnotou permeability platí aj pre *izotropné lineárne* materiály

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{0.38}$$

kde μ je permeabilita materiálu [H/m] a $\mu_r = \mu / \mu_0$ je relatívna permeabilita materiálu [-]. Tento vzťah umožňuje klasifikovať magnetické materiály ako *diamagnetické* ($\mu_r < 0$), *paramagnetické* ($\mu_r = 1$ až 10) a *feromagnetické* ($\mu_r \gg 10$), pravda, pre aplikačne najdôležitejšie, feromagnetické izotropné materiály je nelineárny

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\,\mathbf{H} \tag{0.39}$$

a navyše nejednoznačný, pretože okamžitá hodnota $\mathbf{B}$ závisí aj od predchádzajúcej histórie zmeny $\mathbf{H}$. Pre nestacionárnu numerickú analýzu magnetického poľa v takomto materiáli treba zadať hodnoty z jeho hysteréznej slučky podľa typu materiálu a podľa rozsahu v akom sa predpokladá zmena budiacej intenzity $\mathbf{H}$. Vzťah (0.39) naznačuje aj nelinearitu μ v závislosti od intenzity magnetického poľa. Ďalšiu komplikáciu pri určovaní magnetických vlastností rôznorodých magnetických materiálov spôsobuje aj ich závislosť od teploty a pri nestacionárnych úlohách aj od frekvencie zmeny magnetického poľa. Pri výpočtových analýzach reálnych úloh sa mnohokrát treba zmieriť so spriemerovanými aproximačnými hodnotami. prípadne vykonať vlastné experimentálne merania materiálu pri daných podmienkach.

Vzťah (0.39) možno zapísať aj v tvare

$$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H})] \tag{0.40}$$

aby sa vyčlenil (nelineárny) príspevok samotného materiálu k celkovej indukcii. Vektor $\mathbf{M}$ [A/m] (kolineárny s $\mathbf{B}$) s nazýva *vektor magnetizácie* (magnetizácia, celkový magnetizačný moment). Ak z (0.40) pomocou (0.38) vylúčime $\mathbf{B}$ dostaneme vzťah pre magnetizáciu v závislosti od intenzity magnetického poľa

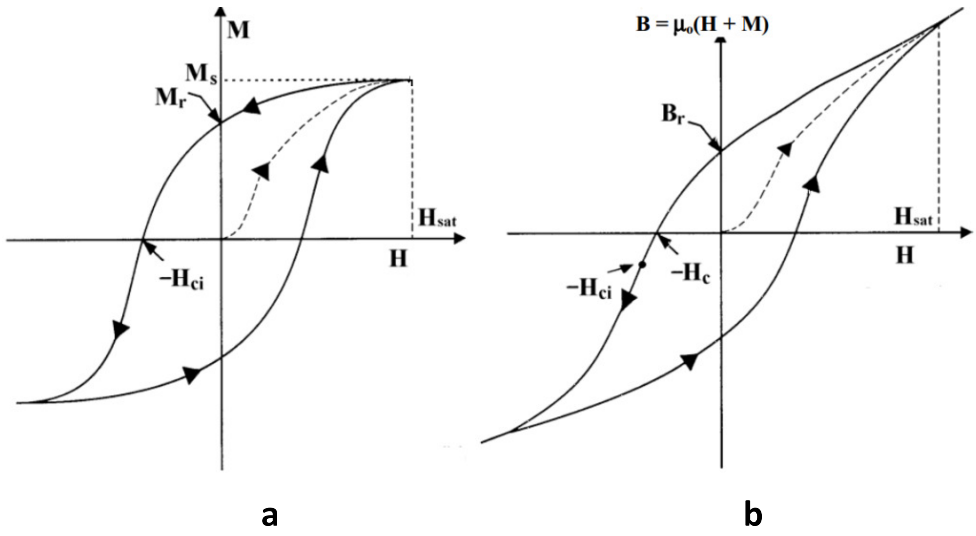
$$\mathbf{M} = [\mu_r(\mathbf{H}) \text{-} 1]\mathbf{H} \tag{0.41}$$

Sú to všetko empirické vzťahy a pre konkrétne feromagnetikum sa určujú experimentálne. Možno sa teda stretnúť s dvomi druhmi experimentálne zistených hysteréznych slučiek feromagnetického materiálu (obr. 24.7). Pre potreby numerickej analýzy magnetického poľa v konkrétnom materiáli sa využívajú B-H krivky a z nich odčítané hodnoty:

$\mathbf{B}_r$ - zvyšková magnetická indukcia

$\mathbf{H}_c$ - koercitívna intenzita magnetického poľa

Pomocou hysteréznej slučky materiálu možno odhadnúť tiež tzv. hysterézne energetické straty pri striedavom magnetovaní (napr. zohrievanie jadier transformátorov), ktoré sú úmerné obsahu plochy ohraničenej hysteréznou slučkou.



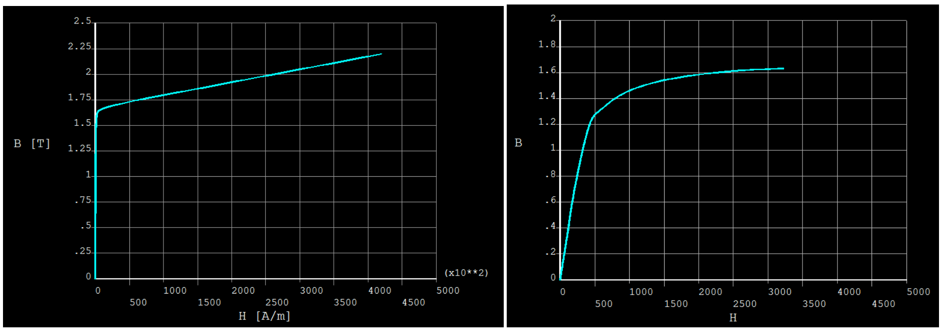
Obr. 24.7 *(a) Závislosť magnetizácie* $\mathbf{M}$ *a (b) magnetickej indukcie* $\mathbf{B}$ *feromagnetického materiálu od zmeny intenzity pôsobiaceho magnetického poľa* $\mathbf{H}$

Podľa tvaru hysteréznej slučky sa materiály delia na :

1. *magneticky tvrdé* – majú širokú magnetickú slučku a vysokú hodnotu B_r a H_c. Ich zmagnetovanie je energeticky pomerne náročné a zdĺhavé, ale po zrušení vonkajšieho magnetického poľa zostávajú naďalej zmagnetované a využívajú sa hlavne na výrobu permanentných magnetov pre priemyselné využitie.
2. *magneticky mäkké* – majú veľmi úzku hysteréznu slučku, teda malú hodnotu H_c pri relatívne vysokom magnetickom výkone (relatívne veľká hodnota B_r) , dajú sa ľahko zmagnetizovať a pri cyklickom zaťažovaní vykazujú malé energetické straty. Majú široké priemyselné využitie, mimo iného aj na jadrá elektromagnetov.

Hysterézne slučky magneticky mäkkého materiálu sú veľmi úzke, z hľadiska praktických výpočtov sa v podstate kryjú s krivkou prvotnej magnetizácie (čiarkovaná krivka v obr. 24.7b) a sú v určitom začiatočnom intervale blízke lineárnemu priebehu so zanedbateľne malou hodnotou H_c. Vypnutie napájania cievky elektromagnetu s magneticky mäkkým jadrom (kedy $H = 0$) potom vedie k vypnutiu magnetického poľa ($B \approx 0$), t.j. k vypnutiu magnetického účinku elektromagnetu. Napr. B-H závislosť kremíkovej (elektrickej) ocele určenej pre jadrá elektromagnetov obsiahnutá v databáze magnetických materiálov programu Ansys túto charakteristiku podľa obr. 24.8 potvrdzuje. Po saturácii pri pomerne malej hodnote H_{sat} a vysokej hodnote B_{sat} nasleduje lineárny priebeh $B = \mu_0 H$ už prakticky s nulovou magnetizáciou materiálu. Pri zväčšení mierky vidieť že približne lineárny priebeh B-H charakteristiky materiálu je zhruba do 1,2 T.

Point	H	B
1	59.524	0.20000
2	119.05	0.40000
3	158.73	0.55000
4	396.83	1.1500
5	555.56	1.3000
6	793.65	1.4000
7	1587.3	1.5500
8	3968.3	1.6350
9	7936.5	1.6550
10	15873.	1.6750
11	31746.	1.7014
12	63492.	1.7500
13	95238.	1.7900
14	0.19048E+06	1.9098
15	0.28571E+06	2.0296
16	0.38095E+06	2.1495
17	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000



Obr. 24.8 *Príklad experimentálne zistenej B-H závislosti kremíkovej ocele*

Permanentný magnet v magnetickom obvode pracuje v oblasti demagnetizačnej krivky (2. kvadrant v obr.24.7), takže stačí zadať hodnoty hysteréznaj slučky v tomto kvadrante. Pritom sa pri numerickom riešení v programe obyčajne vyžaduje posunutie týchto hodnôt o H_c do prvého kvadrantu s kladnými hodnotami *H.*

Silový účinok magnetického poľa na teleso z feromagnetického materiálu možno vypočítať napr. pomocou metódy Maxwellovho napätia (*Maxwell stress method*). Pre objemovú hustotu Lorentzovej sily v magnetickom poli platí

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{0.42}$$

kde $\mathbf{J}$ je objemová hustota prúdu. Celková magnetická sila na teleso s objemom V potom je

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \tag{0.43}$$

Z Ampérovho zákona (zanedbávame posuvný prúd) pre hustotu prúdu dostávame

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0 \tag{0.44}$$

takže vzťah pre magnetickú silu sa zmení na

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\mu_0} \int_V \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} dV \tag{0.45}$$

Možno ukázať že

$$-\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{T} \tag{0.46}$$

kde $\mathbf{T}$ je tenzor Maxwellovho napätia pre stacionárne magnetické pole

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} \tag{0.47}$$

s jednotkovým tenzorom $\mathbf{I}$. Dosadením (0.47) do (0.45) a využitím divergenčnej teorémy dostávame výsledný vzťah pre výpočet magnetickej sily na teleso

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0}\int_V \nabla \times \mathbf{T} dV = \frac{1}{\mu_0}\int_S \mathbf{T} \cdot dS \tag{0.48}$$

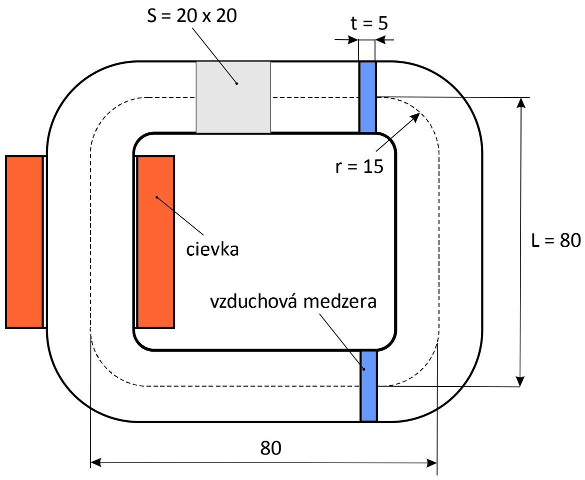
kde S je plocha ohraničujúca teleso. Metóda vyžaduje, aby sa plocha S stýkala len so vzduchom ktorého permeabilita je prakticky rovná μ_0.

Príklad 24.6

Pre magnetický obvod s cievkou (NI=1000 Ampérzávitov, prierez 40x6 mm) a feromagnetickým jadrom ($\mu_r = 1000$) s dvomi vzduchovými medzerami (obr. 24.9) určte analyticky a numericky:

1. Veľkosť magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ v obvode
   a) bez vzduchových medzier
   b) so vzduchovými medzerami
2. Veľkosť sily, ktorou elektromagnet pôsobí na oddelenú kotvu

Rozptyl magnetického poľa v okolí jadra (s vysokou permeabilitou voči vzduchu) i rozptyl poľa v okolí vzduchových medzier zanedbávame.



Obr. 24.9

Pre súvislé jadro (bez vzduchových medzier) možno približnú hodnotu intenzity magnetického poľa (konštantnú po priereze i celom obvode) vyjadriť pomocou Ampérovho zákona obopnutého prúdu (0.21)

$$\oint_\ell \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{volny} = NI$$

V našom prípade dostaneme

$$H\ell = NI \quad \to \quad H = \frac{NI}{\ell} = \frac{NI}{4(L-2r)+2\pi r} = \frac{1000}{4(0{,}08-2\cdot 0.015)+2\pi 0.015} = 3398 \text{ A/m} \tag{a}$$

a z toho

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 3398 = 4{,}27 \text{ T} \tag{b}$$

Spojitosť a konštantnú veľkosť H však narušujú vzduchové medzery. Označme veľkosť intenzity magnetického poľa v jadre H_j a v medzerách H_m. Uvedený integrál sa takto rozkladá na súčet dvoch integrálov po stredovej čiare oboch oblastí s výsledkom

$$H_j\left[4(L-2r)+2\pi r-2t\right]+H_m 2t=NI \tag{c}$$

Pretože na rozhraní dvoch prostredí s rôznymi permeabilitami sa nemení na rozhranie kolmá zložka vektora $\mathbf{B}$, platí

$$B_j=B_m \quad\rightarrow\quad \mu_r\mu_0 H_j=\mu_0 H_m \quad\rightarrow\quad H_m=\mu_r H_j \tag{d}$$

Z rovníc (d) a (c) dostávame intenzitu magnetického poľa vo vzduchovej medzere

$$H_m=\frac{NI}{1/\mu_r\left[4(L-2r)+2\pi r-2t\right]+2t}=$$

$$=\frac{1000}{1/1000\left[4(0{,}08-2\cdot 0{,}015)+2\pi 0{,}015-2\cdot 0{,}005\right]+2\cdot 0{,}005}=97087\ \text{A/m}$$

Približná veľkosť magnetickej indukcie v obvode so vzduchovými medzerami (konštantná po priereze i celom obvode) teda je

$$B=B_j=B_m=\mu_0 H_m=4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 97087=0{,}122\ \text{T} \tag{e}$$

Pre ťahovú silu na kotvu platí [pozri napr. http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnet]

$$F=2F_m=2\frac{B^2 S}{2\mu_0}=2\frac{0.122^2\cdot 0.02^2}{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}=4{,}74\ \text{N} \tag{f}$$

Numericky sme úlohu riešili v programe Ansys týmto interaktívnym postupom:

1. Preferences, Magnetic-Nodal, OK;

Zadanie typu prvku a relatívnej permeability materiálu jadra obvodu

2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Scalar, Scalar Brick 96, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1000, OK, Material, Exit;

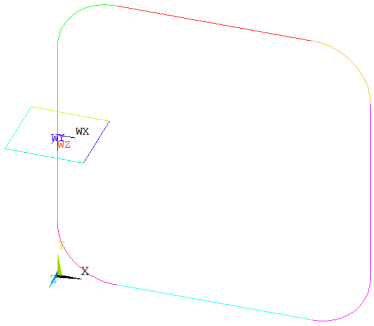
Vytvorenie stredovej čiary jadra

4. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=0.08, Y1=0, Y2=0.08, OK;
5. Modeling, Delete, Areas Only, Pick All;
6. Plot, Lines;
7. Modeling, Create, Lines, Line Filet, Kliknite dve stýkajúce sa čiary, OK, RAD=0.015, Apply, Postup zopakujte pre zvyšné tri dvojice čiar, OK;

Umiestnenie pracovnej roviny do miesta a správnej polohy na vytvorenie cievky a zadanie prierezu jadra

8. Work Plane, Offset WP by Increment, XYZ Offsets: 0, 0.04,0 Apply,Nastavte Degrees na 90 a kliknite +X, OK;
9. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Centr&Cornr, Width=0.02, Height=0.02, OK;

10. Plot, Lines, Kliknite ikonku šikmého pohľadu;



Vytvorenie jadra obvodu (zatiaľ bez vzduchových medzier)

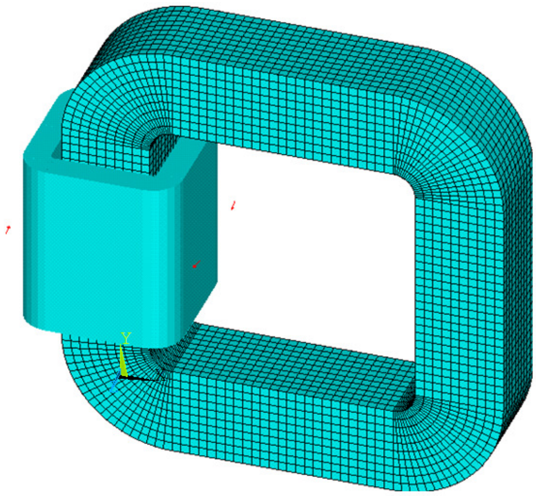
11. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Line by WrkPlane, Kliknite ľavú zvislú čiaru, OK;
12. Modeling, Operate, Extrude, Areas, Along Lines, Kliknite štvorcovú plochu, OK, Kliknite postupne všetky čiary veľkého štvorca začínajúc čiarou nad plochou, OK;
13. Numbering Ctrls, Merge Items, Label=Keypoints, OK;

Vytvorenie konečných prvkov súvislého jadra obvodu

14. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, SIZE=0.002, OK;
15. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;

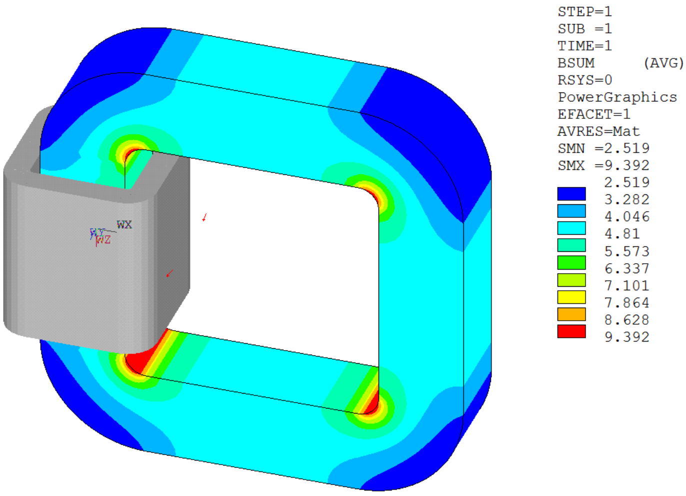
Vytvorenie cievky

16. Modeling, Create, Racetrack Coil, XC=0.015, YC=0.015, RAD=0.004, TCUR=1000, DY=0.006, DZ=0.04, Cname=cievka, OK;
17. Plot, Replot;



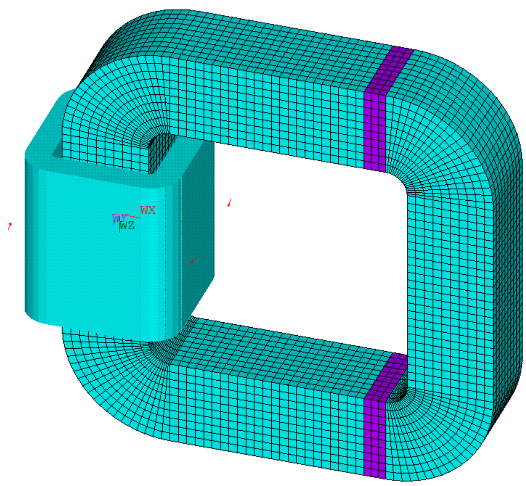
Výpočet úlohy metódou redukovaného skalárneho potenciálu (RSP) a znázornenie hodnôt hustoty magnetického toku (V rovných častiach jadra sa B pohybuje v rozmedzí 4,046 až 4,81 T; uvedený analytický odhad v týchto miestach je 4,27 T)

18. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, Biot=YES, OK;
19. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Flux Density, Magnetic flux density vector sum, OK;



Vytvorenie modelu jadra so vzduchovými medzerami (t.j. elektromagnetu s oddelenou kotvou)

20. Preprocessor, Meshing, Clear, Volumes, Pick All;
21. Plot, Lines;
22. Modeling, Copy, Areas, Kliknite pravé koncové plochy vodorovných objemov jadra, OK, DX=-0.005, OK;
23. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volume by Area, Kliknite horný vodorovný objem jadra, OK, Kliknite hornú novovytvorenú plochu, Apply, To isté zopakujte aj so spodnou časťou, OK;
24. Plot, Volumes;
25. Material Props, Material Models, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, Material, Exit;
26. Meshing, Mesh Attributes, Picked Volumes, Kliknite objemy vzduchových medzier, OK, MAT=2, OK;
27. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;
28. Plot Ctrls, Numbering, Elem-Attrib numbering, Material Numbers, /NUM=Colors Only, OK;



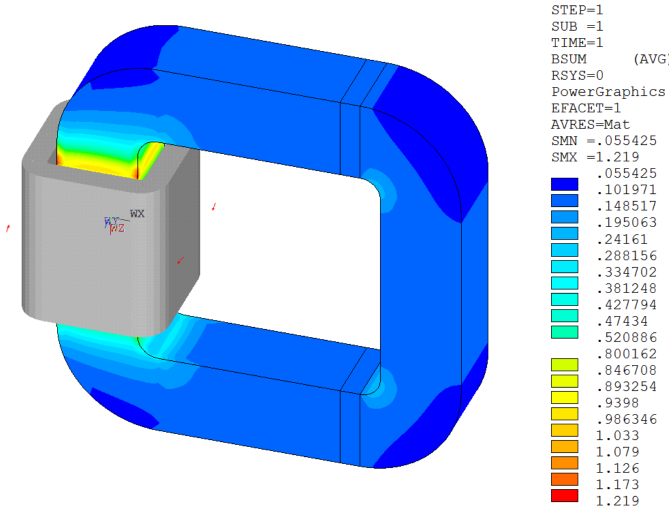
Príkazy na výpočet ťahovej sily na kotvu metódou Maxwellovho napätia

29. Select, Entities, Volumes, By Num Pick, From Full, Apply, Kliknite tri objemy kotvy, OK, Elements, Attached to Volumes, OK;
30. Select, Comp/Assembly, Create Component, Cname=kotva, Entity=Elements, OK;

31. Select, Everythings;
32. Solution, Define Loads, Apply, Magnetic, Flag, Comp Force/Torque, KOTVA, OK;

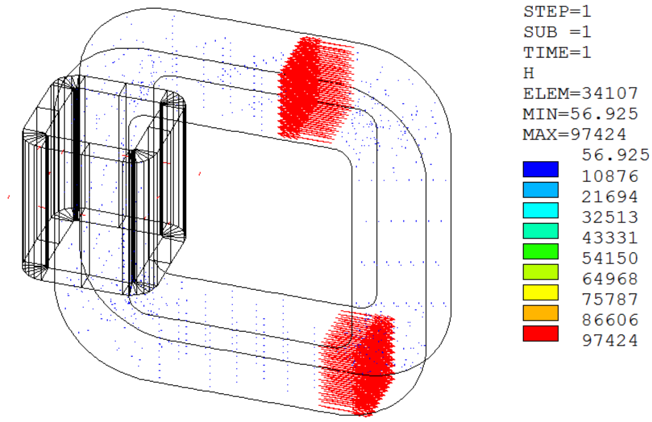
Výpočet a znázornenie veľkosti hustoty magnetického toku B. Porovnajte výrazný pokles oproti hodnotám bez vzduchových medzier. V rovných častiach sa hodnoty pohybujú v rozmedzí 0,10 až 0.15 T. Uvedený analytický odhad v týchto miestach je 0,12 T

33. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, Biot=YES, OK;
34. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Flux Density, Magnetic flux density vector sum, OK;



Znázornenie intenzity magnetického poľa vo vzduchových medzerách(t.j. medzi magnetom a kotvou). Uvedený analytický odhad je 97087 A/m

35. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Field Intensity, Magnetic field intensity vector sum, OK;



Vypísanie vypočítanej ťahovej sily na kotvu

36. General Postproc, Elec&Mag Calc, Component Based, Force,, Component=KOTVA, OK;

SUMMARY OF FORCES BY MAXWELL STRESS TENSOR
Units of Force: (N)

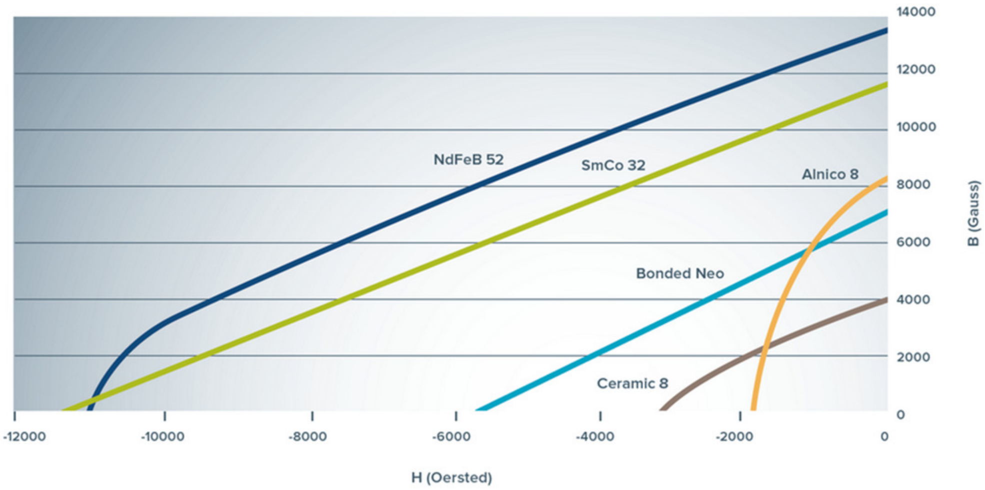
Component	Force-X	Force-Y	Force-Z
KOTVA	-0.47599E+01	0.70437E-13	0.19686E-14

Note: Maxwell forces are in the Global Cartesian coordinate system.

37. File, Exit, Save Geom+Loads, OK;

24.5 Obvod s permanentným magnetom

V mnohých priemyselných elektrotechnických aplikáciách je z dôvodov výhodnosti resp. nutnosti elektromagnet nahradzovaný permanentným magnetom s určitou vhodnou charakteristikou. Parametre magnetu udávajú výrobcovia a medzi najdôležitejšie patria charakteristiky udané na demagnetizačnej krivke materiálu magneta (2. kvadrant normálnej hysteréznej slučky – obr. 24.7 b). Ukážka týchto charakteristík niektorých materiálov používaných na výrobu výkonných permanentných magnetov je uvedená na obr. 24.10.

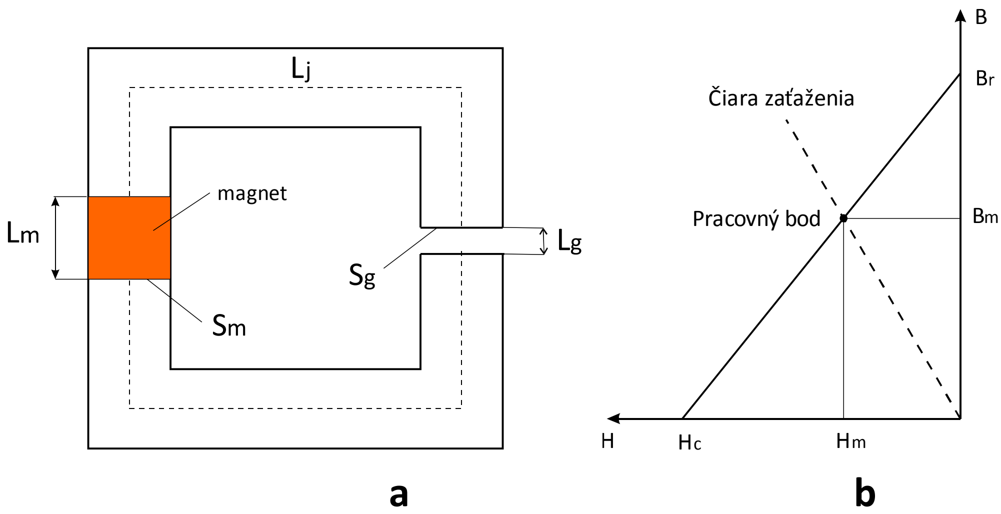


Obr. 24.10 *Demagnetizačné krivky niektorých priemyselných magnetických materiálov (1 gauss = 10^{-4} tesla, 1 oersted = 79,577 A/m)*

Hlavnou úlohou permanentného magnetu vo viac alebo menej zložitom magnetickom obvode je, rovnako ako pri elektromagnete, vytvoriť na požadovanom mieste vo vzduchovej medzere alebo viacerých medzerách potrebnú intenzitu magnetického poľa. Pri jednoduchom obvode možno rozmery magnetu resp. jeho magnetickú výkonnosť vo vyšetrovanom obvode určiť aj analyticky, pri zložitejších obvodoch sa nezaobídeme bez využitia numerických sofvérových prostriedkov. Treba si uvedomiť, že výrobcom udávané základné charakteristiky sú len určité vstupné údaje do týchto analýz, ku ktorým pristupujú ďalšie, predovšetkým tvarové charakteristiky magnetu i tvarové a materiálové charakteristiky obvodu.

Uvažujme jednoduchý magnetický obvod na obr. 24.11a s lineárnou demagnetizačnou charakteristikou materiálu magnetu (obr. 24.11b). Na približnú analýzu obvodu možno využiť Ampérov zákon (0.21) s integrálom po stredovej čiare obvodu, podľa ktorého pri absencii voľného elektrického prúdu pre intenzity magnetického poľa v jednotlivých dĺžkových úsekoch obvodu platí

$$H_m L_m + H_j L_j + H_g L_g = 0 \qquad (0.49)$$



Obr. 24.11 **a)** Jednoduchý obvod so vzduchovou medzerou
b) Určenie pracovného bodu

Ako vidieť úlohu zjednodušujeme tak, že magnetické pole existuje len v materiáli obvodu a vzduchovej medzere, čo možno pripustiť pri vysokej permeabilite jadra a malej šírke vzduchovej medzery (únik generovaného magnetického poľa do vzduchového okolia s veľmi nízkou permeabilitou μ_0 je veľmi malý). Vzhľadom na vysokú permeabilitu jadra μ_j je člen $H_j L_j$ zanedbateľne malý ($H_j = B_j / \mu_j$) oproti ostatným členom a rovnica (0.49) sa zjednodušuje na

$$H_m L_m + H_g L_g = 0 \qquad (0.50)$$

Využijeme tiež Gaussov zákon o spojitosti magnetického toku v obvode, podľa ktorého platí

$$B_m S_m = B_g S_g \qquad (0.51)$$

kde vystupujú prierezové plochy magnetu a vduchovej medzery, ktoré môžu mať nerovnakú veľkosť. Kombináciou týchto rovníc a využitím vzťahu $B_g = \mu_0 H_g$, ktorý platí pre vzduchovú medzeru, dostávame rovnicu priamky zaťaženia v tvare

$$B_m = -\mu_0 \frac{S_g}{S_m} \frac{L_m}{L_g} H_m \qquad (0.52)$$

Analytické alebo grafické určenie súradníc priesečníka priamky zaťaženia a demagnetizačnej čiary poskytne potom hľadané hodnoty H_m a B_m a z predchádzajúcich rovníc aj ďalšie údaje o magnetickom poli v obvode.

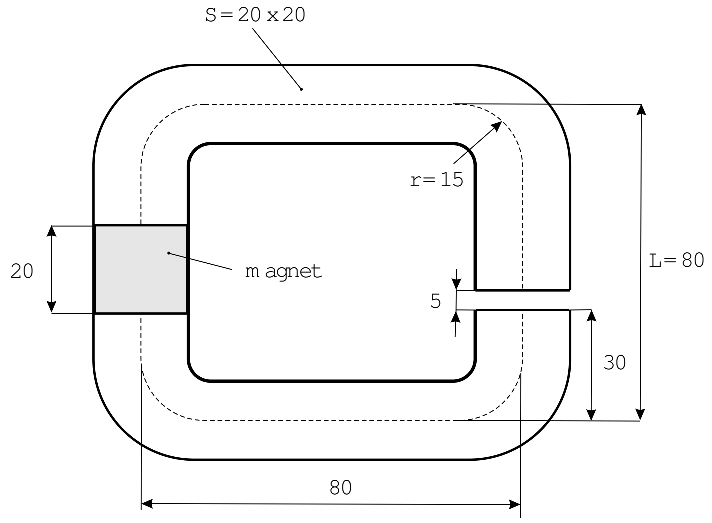
Príklad 24.7

Magnetický obvod s permanentným magnetom a jadrom s $\mu_r = 5000$ má rozmery podľa obr. 24.12. Určte:

Veľkosť intenzity magnetického poľa vo vzduchovej medzere H_g ,keď

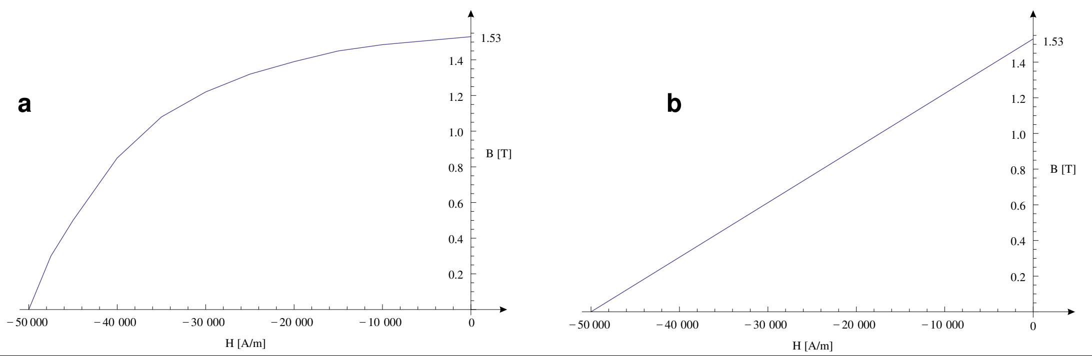
a) demagnetizačná čiara materiálu magnetu je lineárna (zadaná na obr.24.13b)
b) demagnetizačná čiara materiálu magnetu je nelineárna (zadaná na obr.24.13a)

Rozptyl magnetického poľa v okolí jadra (s vysokou permeabilitou voči vzduchu) i rozptyl poľa v okolí vzduchovej medzery zanedbávame.



Obr.24.12 *Obvod s permanentným magnetom a vzduchovou medzerou*

```
ListLinePlot[{{-50000, 0}, {0, 1.53}}]
ListLinePlot[{{- 50000, 0}, {- 47500, 0.3}, {- 45000, 0.5},
  {- 40000, 0.85}, {- 35000, 1.08}, {- 30000, 1.22},
  {- 25000, 1.32}, {- 20000, 1.39}, {- 15000, 1.45},
  {- 10000, 1.485}, {0, 1.53}}]
```



Obr.24.13 *Demagnetizačná krivka materiálu (**a**) a jej lineárna aproximácia (**b**)*

Pre analytické lineárne riešenie napíšeme rovnicu demagnetizačnej priamky s premennými H_1 a B_1

$$B_1 = \frac{B_r}{H_c} H_1 + B_r$$

a rovnicu priamky zaťaženia podľa (0.52) s pemennými H_2 a B_2 pričom $S_g = S_m$

$$B_2 = -\mu_0 \frac{L_m}{L_g} H_2$$

Priesečník týchto priamok má v oboch rovniciach rovnaké súradnice; sú to hľadané hodnoty H_m a B_m pracovného bodu (pozri obr.24.11b). Na ich určenie po dosadení konkrétnych hodnôt dostávame z uvedených rovníc dve rovnice o dvoch neznámych

$$B_m = \frac{1{,}53}{50000} H_m + 1{,}53$$

$$B_m = -4\pi \cdot 10^{-7} \frac{0.02}{0.005} H_m$$

Riešením dostávame $H_m = 42900$ A/m a intenzita magnetického poľa vo vzduchovej medzere podľa (0.50) je

$$H_g = -\frac{L_m}{L_g} H_m = -\frac{0,02}{0,05} 42900 = -171680 \text{ A/m}$$

Pre numerické riešenie úlohy v programe Ansys treba demagnetizačné čiary materiálu magnetu presunúť do kladných čísiel (do prvého kvadrantu hysteréznej slučky) a jednotlivé body zadať tabuľkovým spôsobom (pri B-H voľbe zadávania materiálu v programe). Dosiahne sa to pripočítaním hodnoty $+H_c$ ku všetkym hodnotám H demagnetizačnej krivky. Začiatočný bod je potom vždy H =0, B = 0, ktorý sa nemusí zadávať.

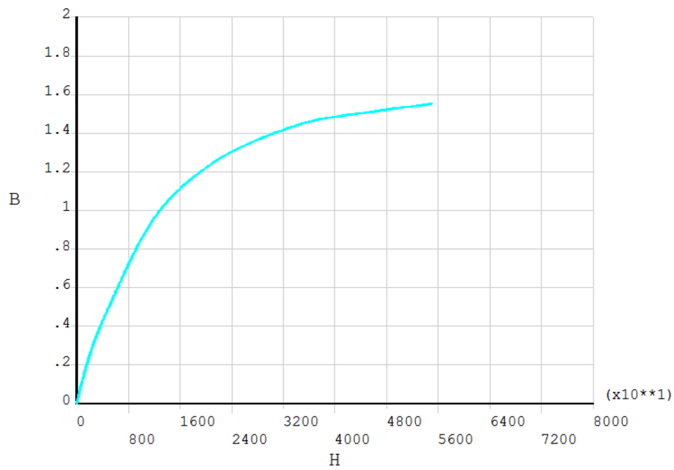
Lineárny priebeh sa jednoducho zadá pomocou kladnej hodnoty H_c a sklonu krivky, t.j. pomocou konštantnej hodnoty relatívnej permeability o veľkosti B_r/H_c. Pre tento príklad to je: $\mu = \mu_0\mu_r = \mu_0 B_r / H_c = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,53 / 50000 = 24$ H/m.

Podľa obr.24.13 prepočítané hodnoty pre udanie B – H závislosti do programu sú:

H	2500	5000	10000	15000	20000	25000	30000	35000	40000	45000	50000
B	0,3	0,5	0,85	1,08	1,23	1,32	1,39	1,45	1,49	1,52	1,53

Kontrolné numerické lineárne riešenie úlohy ako aj riešenie s reálnou (nelineárnou) demagnetizačnou krivkou materiálu (obr.24.13a) sme dostali v jednom behu programu Ansys s touto postupnosťou príkazov v interaktívnom móde programu:

1. Preferences, Magnetic-Nodal, OK;
   Zadanie typu prvku a materiálov (1 = jadro, 2 = vzduch, 3 = magnet - lineárny materiál, 4 = magnet - BH krivka)
2. Preprocessor, Element Type, Add/Edit/Delete, Add, Magnetic Scalar, Scalar Brick 96, OK, Close;
3. Material Props, Material Models, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=5000, OK, Material, Exit;
4. Material Props, Material Models, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=1, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Relative Permeability, Constant, MURX=24, OK, Coercive force, Orthotropics, MGYY=50000, OK, Material, New Model, OK, Electromagnetics, Coercive Force, Orthotropic, MGYY=50000, OK, BH Curve, H=2500, B=0.3, Add Point, H=5000, B=0.5, Add Point, H=10000, B=0.85, Add Point, H= 15000, B=1.08, Add Point, H=20000, B=1.22, Add Point, H=25000, B=1.32, Add Point, H= 30000, B=1.39, Add Point, H=40000, B=1.485, Add Point, H=50000, B=1.53, Graph, BH, OK, Material, Exit;

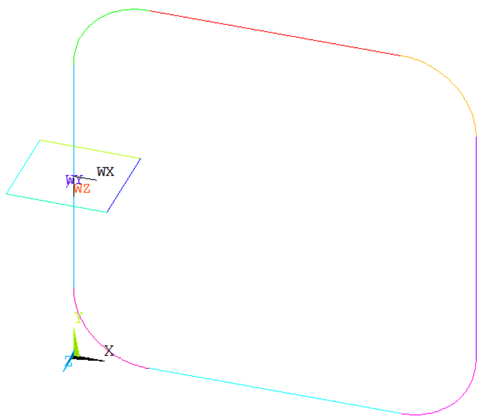


Vytvorenie stredovej čiary jadra

5. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Dimensions, X1=0, X2=0.08, Y1=0, Y2=0.08, OK;
6. Modeling, Delete, Areas Only, Pick All;
7. Plot, Lines;
8. Modeling, Create, Lines, Line Filet, *Kliknite dve ľubovoľné stýkajúce sa čiary*, OK, RAD=0.015, Apply, *Postup zopakujte pre zvyšné tri dvojice čiar*, OK;

Umiestnenie pracovnej roviny do miesta a správnej polohy na vytvorenie jadra (zatiaľ bez vzduchovej medzery) a zadanie jeho prierezu

9. Work Plane, Offset WP by Increment, XYZ Offsets: 0, 0.03,0 Apply, *Nastavte Degrees na 90 a kliknite +X*, OK;
10. Modeling, Create, Areas, Rectangle, By Centr&Cornr, Width=0.02, Height=0.02, OK;
11. Plot, Lines, *Kliknite ikonku šikmého pohľadu*;

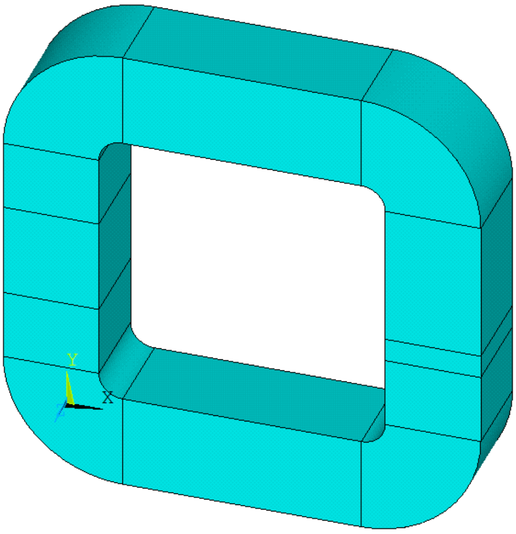


12. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Line by WrkPlane, *Kliknite ľavú zvislú čiaru*, OK;
13. Modeling, Operate, Extrude, Areas, Along Lines, *Kliknite štvorcovú plochu*, OK, *Kliknite postupne všetky čiary veľkého štvorca začínajúc čiarou nad plochou*, OK;
14. Numbering Ctrls, Merge Items, Label=Keypoints, OK;

Vytvorenie objemov pre vzduchovú medzeru a magnet

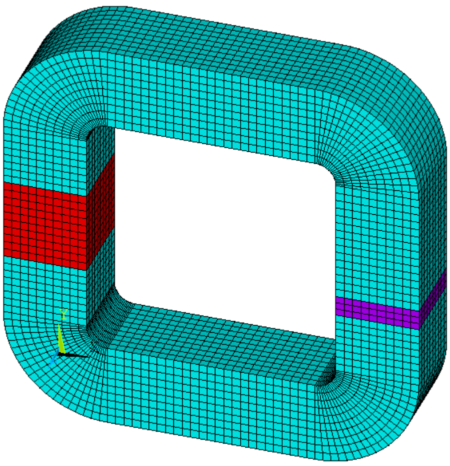
15. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volumes by WrkPlane, *Kliknite pravý zvislý objem*, OK, Plot, Replot;
16. Work Plane, Offset WP by Increments, XYZ Offsets: 0, 0, -0.005, OK;

17. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volumes by WrkPlane, *Kliknite pravý väčší zvislý objem*, OK, Plot, Replot;
18. Work Plane, Offset WP by Increments, XYZ Offsets: 0, 0, -0.015, OK;
19. Modeling, Operate, Booleans, Divide, Volumes by WrkPlane, *Kliknite ľavý väčší zvislý objem*, OK, Plot, Replot;



Tvorba siete prvkov

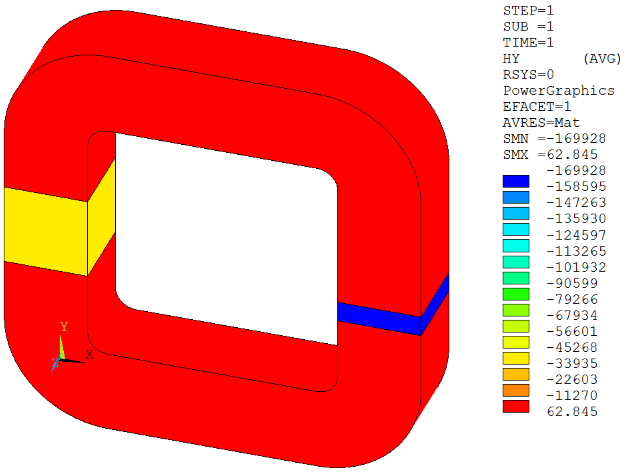
20. Meshing, Size Cntrls, Manual Size, Global, Size, SIZE=0.002, OK;
21. Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, Pick All;
22. Plot, Volumes;
23. Mesh Attributes, Default Attribs, MAT=2, OK;
24. Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, *Kliknite objem vzduchovej medzery*, OK, Yes, OK;
25. PlotCtrls, Numbering, Elem/Attrib numbering = Material numbers, /NUM=Colors only, OK;
26. Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, MAT=3, OK;
27. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, *Kliknite objem magneta*, OK, Yes, OK;



Lineárny výpočet a znázornenie veľkosti intenzity magnetického poľa. (Uvedený analytický odhad vo vzduchovejm medzere je -171680 A/m.)

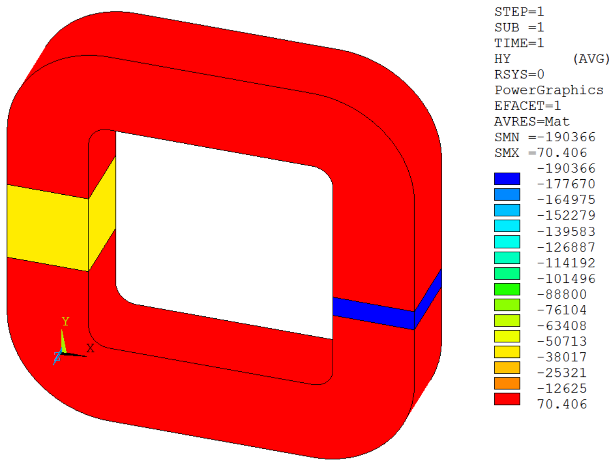
28. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, OK;

29. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Field Intensity, Y-component of magnetic field intensity, OK; (Numerický výsledok je, ako vidieť, -169928 A/m.)



Nelineárny výpočet s B-H krivkou materiálu magneta a znázornenie veľkosti intenzity magnetického poľa.

30. Preprocessor, Meshing, Mesh Attributes, Default Attribs, MAT=4, OK;
31. Meshing, Mesh, Volumes, Mapped, 4 to 6 sided, *Kliknite objem magneta*, OK, Yes, OK;
32. Solution, Solve, Electromagnet, Static Analysis, Opt&Solv, Option=RSP, OK;
33. General Postproc, Plot Results, Contour Plot, Nodal Solu, Nodal Solution, Magnetic Field Intensity, Y-component of magnetic field intensity, OK;



Nelineárny výpočet s B-H krivkou upresnil maximálnu intenzitu magnetického poľa vo vzduchovej medzere na -190366 A/m. Znamienko mínus znamená, že vektor **H** má vo vzduchovej medzere opačný zmysel ako kladná globálna os Y.

Literatúra

[20] A. C. Polycarpou, Introduction to the Finite Element Method in Electromagnetics., Morgan & Claypool, 2006.
[21] A. Tirpák, Elektromagnetizmus, Iris, 2013.
[22] „URL: http://www.netdenizen.com/emagnet/solenoids/solenoidonaxis.htm," [Online].