D8. Doskové konečné prvky

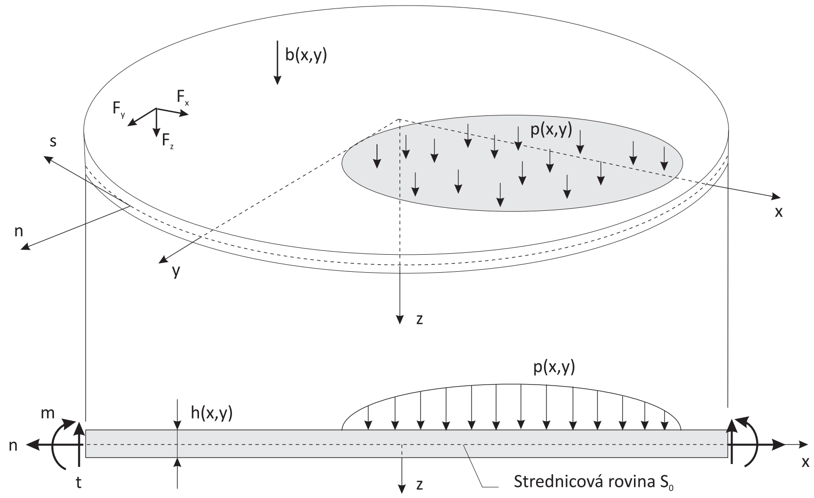
1. Základné pojmy

Tenkou doskou (obr. 1) nazývame ploché trojrozmerné teleso (konštrukčný prvok) s rovinnou strednicovou plochou (body hornej a spodnej plochy dosky sú od tejto roviny rovnako vzdialené). Priečny rozmer dosky (hrúbka) je výrazne menší ako ostatné rozmery (menší ako desatina jej šírky v najužšom mieste, ale nie tak extrémne malý, že doska stráca ohybovú tuhosť). Je to špeciálny prípad tzv. škrupiny, ktorá je charakterizovaná rovnako ako doska, ale strednicovú plochu má zakrivenú. Ak je doska namáhaná len v jej rovine, ide o membránové namáhanie dosky (steny) klasickou rovinnou napätosťou ([1], [2]). Pri zaťažení len v priečnom smere ide o namáhaní dosky na ohyb a krútenie. Vo všeobecnosti je doska namáhaná kombináciou oboch týchto zaťažení.

Väčšina využívaných matematických modelov (matematických teórií) riešiacich doskový pevnostný problém vznikla ešte pred počítačovou érou. Sú to hlavne:

- Kirchhoffov model vhodný pre lineárne tenké dosky s malým priehybom. Zanedbáva energiu šmykových napätí a predpokladá nezávislosť ohybového a membránového zaťaženia
- Reissner-Mindlinov model umožňujúci riešenie malého priehybu lineárnych tenkých a mierne hrubých dosiek s približným zohľadnením energie šmykových napätí
- Von Kármánov model pre geometricky nelineárne tenké dosky s väzbou stenového a ohybového napätia, čo je dôležité pre analýzu napäťového spevňovania [2] a stabilitné analýzy
- Exaktné modely využívajúce trojrozmernú teóriu pružnosti

V MKP sa pomocou doskových konečných prvkov modeluje len strednicová rovina dosky, ktorá je pri totálnej Green-Lagrangeovskej formulácii aj referenčnou rovinou. Doskové prvky sú teda z geometrického hľadiska dvojrozmerné; zmenou ich hrúbky možno modelovať dosku s meniacou sa hrúbkou, v prípade potreby možno meniť lineárne aj hrúbku samotného prvku.

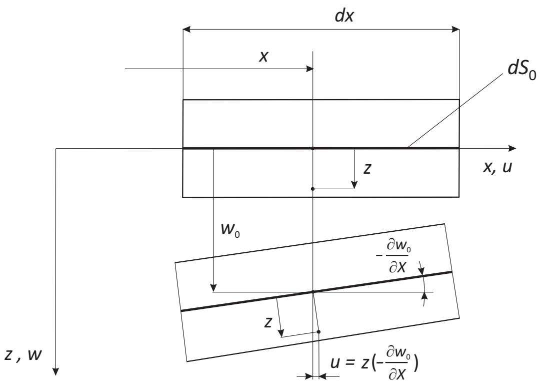


Obr. 1

2. Kinematické rovnice Kirchhoffovho a von Kármánovho modelu dosky

Oba modely vychádzajú z Kirchhoffových predpokladov, že kolmice na nezaťaženú strednicovú rovinu dosky (priečne normály) zostanú rovné aj po zaťažení a rotujú tak, aby si zachovali normálový smer aj na zdeformovanú strednicovú plochu (priehybovú plochu). Predpokladá sa tiež, že body dosky na spoločnej normále nemenia svoje vzájomné vzdialenosti (deformácia hrúbky dosky sa zanedbáva, $\varepsilon_z = 0$). Potom pole posunutí bodov dosky možno vyjadriť pomocou funkcií zložiek posunutí bodov *strednicovej roviny* u_0, v_0 a w_0 (takto vyjadrený ohybový príspevok k posunutiu v smere osi x je znázornený na obr. 2)

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{8.1}$$



Obr. 2

S touto aproximáciou funkcií posunutí možno zložky Green-Lagrangeovho tenzora deformácie dosky výrazne zjednodušiť. Pripomeňme si nezávislé zložky tohto tenzora z dodatku [D3] (materiálové súradnice sú kvôli jednoduchosti teraz označené malými písmenami - nepotrebujeme ich odlíšenie od priestorových)

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
E_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\
E_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\
2E_{xy} &= \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\
2E_{yz} &= \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \\
2E_{xz} &= \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Pri geometricky i fyzikálne lineárnej Kirchoffovej doske sú gradienty funkcií zložiek posunutí malé čísla a všetky kvadratické členy v (8.2) možno zanedbať. S využitím (8.1) dostávame

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

V prípade, že na doske vzniknú väčšie priehyby a väčšie rotácie priečnych normál (zhruba do 15°), potom nasledujúce kvadratické členy sú ešte stále malé, ale nie zanedbateľné

$$
\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}
\tag{8.4}
$$

Zohľadnením týchto členov dostaneme tzv. von Kármánove pomerné deformácie geometricky nelineárnej dosky

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

pričom ostatné zložky sú rovné nule ako v (8.3).

3. Teória Kirchhoffovej dosky zaťaženej len v priečnom smere

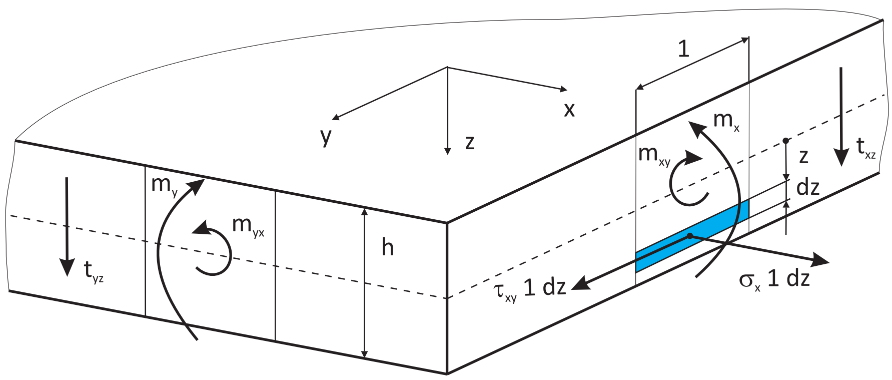
Ak na dosku pôsobí len zaťaženie v priečnom smere a body dosky sa môžu voľne pohybovať v smere x a y, potom pomerné deformácie Kirchhoffovho modelu podľa (8.3) sú

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{8.6}$$
$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Pre určitú hodnotu premennej z ($-h/2 \le z \le h/2$) sú to deformačné zložky rovinnej napätosti (teraz ale s $\varepsilon_z = 0$), ktoré, ako vidieť z (8.6), sa lineárne menia po hrúbke dosky. Z fyzikálnych (konštitutívnych) rovníc platných pre rovinnú napätosť a izotropný materiál dostávame napätia v doske

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1-\mu^2}(1-\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \tag{8.7}$$

kde E je modul pružnosti ťahu/tlaku, μ Poisonovo číslo a G modul pružnosti v šmyku materiálu. Priehybová plocha je aj neutrálnou plochou napätí, na nej sú napätia nulové a menia znamienko. Extrémne hodnoty napätí sa, analogicky ako pri ohýbanom nosníku, nachádzajú na spodnom a hornom povrchu dosky.



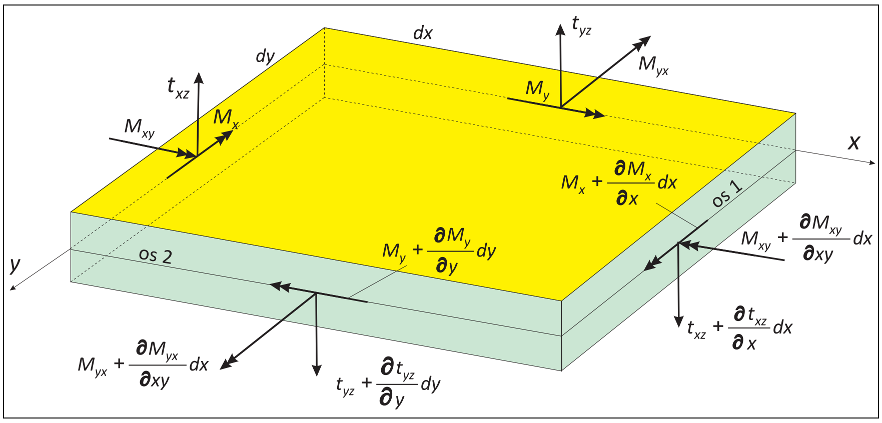
Obr. 3

Výslednice vnútorných síl sa určujú integráciou napätí po priečnom reze s jednotkovou šírkou (obr. 3), a preto sa často označujú malými písmenami

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \cdot 1 \cdot dz) z = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$
$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_y \cdot 1 \cdot dz) z = -D\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)$$
$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy} \cdot 1 \cdot dz) z = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$
$$t_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \cdot 1 \cdot dz = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$
$$t_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \cdot 1 \cdot dz = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \tag{8.8}$$

kde sme v posledných dvoch rovniciach využili výsledky dvoch momentových rovníc rovnováhy diferenciálneho elementu dosky k osiam 1 a 2 (obr. 4)

$$t_{xz} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$
$$t_{yz} = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \tag{8.9}$$



Obr. 4

Koeficient D, ktorý v (8.8) vyjadruje tuhosť dosky, je

$$D = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{8.10}$$

Silová podmienka rovnováhy tohto elementu zaťaženého tlakom p dáva

$$pdxdy + (t_{xz} + dt_{xz})dy - t_{xz}dy + (t_{yz} + dt_{yz})dx - t_{yz}dx = 0$$

Po vykrátení členov a vydelení rovnice súčinom $dxdy$ sa zjednoduší na

$$p + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{8.11}$$

Dosadením priečnych síl z (8.8) a úpravou dostaneme biharmonickú diferenciálnu rovnicu dosky

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \qquad \rightarrow \qquad \Delta\Delta w = \frac{p}{D} \tag{8.12}$$

kde Δ je Laplaceov diferenciálny operátor. Pomocou (8.8) až (8.11) ju možno vyjadriť aj pomocou výsledníc vnútorných síl

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = p \tag{8.13}$$

Pri Kirchhoffovej doske, ako vyplýva z kinematických rovníc, sa však energia *priečnych* šmykových deformácií zanedbáva z čoho vyplýva, že pri tomto modeli sa predpokladá $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Z praktického hľadiska to znamená, že tieto napätia musia by výrazne menšie ako napätia (8.7). Ak to nie je splnené, treba použiť model (konečný prvok) zohľadňujúci vplyv priečnych síl dosky na energiu napätosti (napr. Mindlin-Reissnerov model).

Z rozboru napätosti Kirchhoffovej dosky vyplýva, že najviac namáhané miesta dosky treba hľadať na hornej alebo spodnej ploche dosky, kde absolútne hodnoty ohybových normálových napätí σ_x, σ_y i šmykové napätie od krútenia τ_{xy} majú extrémne hodnoty vzhľadom na ich priebeh po hrúbke dosky. Kritické miesto pre posúdenie pevnosti dosky je potom miesto, kde redukované napätie určené podľa vhodnej pevnostnej hypotézy (von Misesovo, intenzita napätia) dosahuje maximálnu hodnotu.

Nielen primárna neznáma - funkcia priehybu $w_0(x,y)$ strednicovej roviny dosky, ale aj parciálne derivácie tejto funkcie majú jasný fyzikálny význam, dôležitý pri vyhodnocovaní výsledkov i pri predpisovaní deformačných okrajových podmienok. Funkcia $\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}$ vzhľadom na malé rotácie normál dosky sa považuje priamo za uhol natočenia normály v danom bode v rovine xz (t.j. okolo osi rovnobežnej so súradnicovou osou y). Analogicky

$\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}$ je uhol natočenia v rovine *yz.* Na *zakrivenom* obvode strednicovej roviny treba vyjadrovať natočenia okolo dotyčnice a okolo normály - $\partial w_0 / \partial n$ a $\partial w_0 / \partial s$. Silovými partnermi natočení sú ohybové momenty a krútiaci moment na jednotku dĺžky m_x, m_y, m_n a m_s, ktoré v prípade zadaných deformačných okrajových podmienok predstavujú neznáme reakčné momenty v príslušných miestach. Rovnako ako pri iných pevnostných úlohách, možno zadávať aj silové a zmiešané okrajové podmienky.

Doska je vo všeobecnosti zaťažená objemovými silami (vlastná tiaž, odstredivá sila), plošným tlakom, čiarovými i sústredenými silami, teplotným zaťažením a reakčnými silami a momentami.

4. Určenie matíc prvku Kirchhoffovej dosky zaťaženej len v priečnom smere

Matice konečného prvku Kirchhoffovej dosky namáhanej len v priečnom smere určíme pomocou princípu virtuálnych posunutí [D2]

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{ext} \tag{8.14}$$

Na prvku budeme uvažovať len konštatný plošný tlak *p*, takže pre virtuálnu prácu vonkajších síl platí

$$\delta W_{ext}^e = \int_{S_0^e} p \delta w_0 dS \tag{8.15}$$

Konštitutívny vzťah (8.7) zapíšeme v maticovom tvare

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{8.16}$$

Po aplikácii virtuálneho posunutia $\delta w_0(x,y)$ na strednicovú plochu zaťaženého prvku virtuálna práca vnútorných síl bude

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_{S_0^e} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dS \tag{8.17}$$

kde

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} & -\dfrac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} & -2\dfrac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^T \tag{8.18}$$

Na prvku zvolíme aproximáciu funkcie $w_0(x,y)$ pomocou vhodných tvarových funkcií prvku $N(x,y)$ a *n* hodnôt zovšeobecnených posunutí uzlových bodov prvku u_j^e

$$w_0(x,y) = \sum_{j=1}^{n} u_j^e N_j(x,y) \tag{8.19}$$

Ak do (8.14) dosadíme (8.15) až (8.19) a za virtuálne posunutie postupne zvolíme funkciu (8.19) s jednotkovými hodnotami zovšeobecnených posunutí (ostatné rovné nule)

$$(\delta w_0)_j = N_j \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{8.20}$$

dostaneme sústavu *n* uzlových rovníc rovnováhy prvku

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \tag{8.21}$$

V (8.21) $\mathbf{K}^e$ je matica tuhosti prvku, $\mathbf{u}^e$ je stĺpcová matica (vektor) zovšeobecnených posunutí prvku a $\mathbf{f}^e$ je vektor uzlových zaťažení prvku od tlaku *p*. Pre všeobecný koeficient matice tuhosti K_{ij} sme dostali

$$K_{ij} = \int_{S_0^e} \left[D_{11} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + D_{12} \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) + 4 D_{33} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right] dxdy \tag{8.22}$$

kde D_{ij} sú členy materiálovej matice $\mathbf{D}$ z (8.16).

Koeficient vektora $\mathbf{f}^e$ na i-tom riadku je

$$f_i = \int_{S_0^e} pN_i dxdy \tag{8.23}$$

Aproximačný polynóm priehybu strednicovej plochy prvku (8.19) možno zapísať aj v maticovom tvare

$$w_0(x,y) = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \tag{8.24}$$

kde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & N_2 & \cdots & N_{n-1} & N_n \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

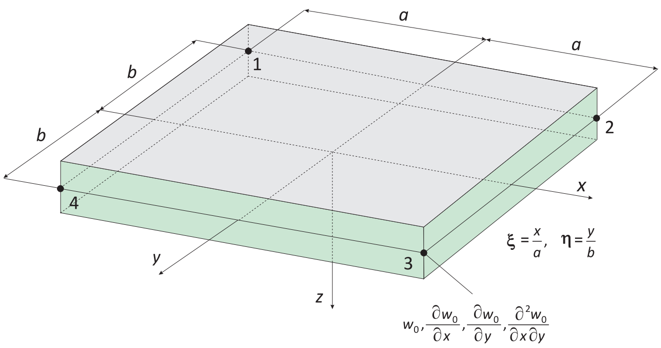
je matica (v tomto prípade riadková) interpolačných funkcií prvku a

$$\mathbf{u}^e = \left[(w_0)_1 \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_1 \quad (w_0)_2 \quad \cdots \quad \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_{NUE} \right]^T \tag{8.26}$$

je vektor zovšeobecnených uzlových posunutí prvku s *NUE* uzlami a so štyrmi uvedenými stupňami voľnosti uzla.

5. Pravouhlý štvoruzlový prvok Kirchhoffovej dosky

Z množstva konečných doskových prvkov, ponúkaných literatúrou MKP (viď napr [Lit 1]), sme pre zoznámenie sa s interpolačnými funkciami a pre demonštráciu numerického spracovania vybrali štvoruzlový pravouhlý prvok so 16 stupňami voľnosti (obr. 5).



Obr. 5

Výpočtový model dosky s týmto prvkom je presný aj pri hrubom delení, pravda, prvok má obmedzené praktické využitie, pretože je vhodný len na riešenie obdĺžnikových a štvorcových dosiek. Patrí do kategórie tzv. *konformných* prvkov, pri ktorých je kontinuita sklonu normály k strednicovej ploche $\partial w_0 / \partial n$ zachovaná vo všetkých bodoch prvku (problémy so zachovaním tejto podmienky vznikajú v rohových bodoch všeobecných štvoruholníkových a trojuholníkových prvkov). Interpolačné funkcie prvku sú [Lit 2]

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \tfrac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-2)\\
N_2 &= -\tfrac{1}{16}a(\xi-1)^2(\xi+1)(\eta-1)^2(-\eta-2)\\
N_3 &= -\tfrac{1}{16}b(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta-1)^2(\eta+1)\\
N_4 &= \tfrac{1}{16}ab(\xi-1)^2(1+\xi)(\eta-1)^2(\eta+1)\\
\\
N_5 &= \tfrac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta-1)^2(-\eta-2)\\
N_6 &= \tfrac{1}{16}a(\xi+1)^2(-\xi+1)(\eta-1)^2(-\eta-2)\\
N_7 &= -\tfrac{1}{16}b(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta-1)^2(\eta+1)\\
N_8 &= -\tfrac{1}{16}ab(\xi+1)^2(1-\xi)(\eta-1)^2(\eta+1)\\
\\
N_9 &= \tfrac{1}{16}(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-2)\\
N_{10} &= \tfrac{1}{16}a(\xi+1)^2(-\xi+1)(\eta+1)^2(\eta-2)\\
N_{11} &= \tfrac{1}{16}b(\xi+1)^2(\xi-2)(\eta+1)^2(-\eta+1)\\
N_{12} &= \tfrac{1}{16}ab(\xi+1)^2(1-\xi)(\eta+1)^2(1-\eta)
\end{aligned} \tag{8.27}
$$

$$N_{13} = \tfrac{1}{16}(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta+1)^2(\eta-2)$$
$$N_{14} = -\tfrac{1}{16}\,a(\xi-1)^2(\xi+1)(\eta+1)^2(\eta-2)$$
$$N_{15} = \tfrac{1}{16}\,b(\xi-1)^2(-\xi-2)(\eta+1)^2(-\eta+1)$$
$$N_{16} = -\tfrac{1}{16}\,ab(\xi-1)^2(1+\xi)(\eta+1)^2(1-\eta)$$

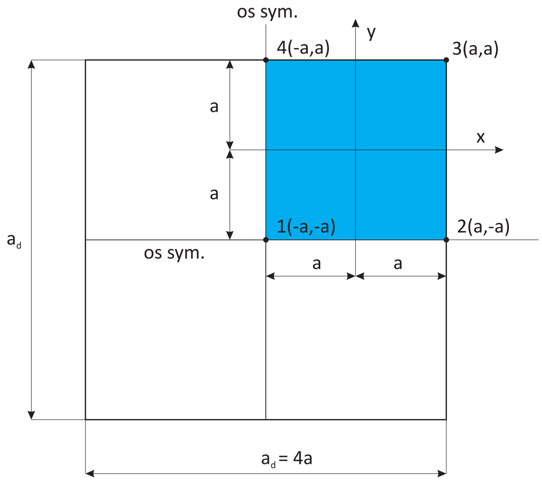
kde

$$\xi = x/a \quad \text{a} \quad \eta = y/b$$

sú prirodzené súradnice prvku [1]. Ako vidieť, vzhľadom na pravouhlý tvar prvku je v tomto prípade vzťah medzi prirodzenými súradnicami a súradnicami x, y jednoduchý, čo uľahčuje deriváciu interpolačných funkcií v (8.22) podľa x a y. Konformnosť prvku sa dosiahla zaradením zmiešanej derivácie do uzlových stupňov voľnosti prvku.

6. Príklad - štvorcová voľne podopretá doska zaťažená konštantným tlakom

Pomocou uvedeného prvku určíme maximálny priehyb a znázorníme priehybovú plochu štvorcovej dosky (obr. 6) so stranou a_d = 2 m zaťaženej normálovým tlakom p = 1000 N/m^2, ktorá je voľne podopretá po obvode. Hrúbka dosky je 0,01 m a materiálové konštanty sú E = 10^{11} N/m^2 , $\mu = 0{,}25$.



Obr. 6

Príklad možno vyriešiť pomerne s malou námahou, pretože prvok dáva veľmi presné výsledky už pri delení dosky na 2x2 prvky. Navyše doska má dve osi symetrie, takže stačí použiť len jeden prvok (obr. 6) s predpísanými podmienkami symetrie. Odpadne teda nutnosť vytvárania globálnych matíc dosky (matice prvku budú zároveň aj matice dosky). Ďalšie zjednodušenie dosiahneme použitím programu Mathematica, pri ktorom nie je potrebné editovať explicitné vzťahy derivácií a integrálov interpolačných funkcií (program si ich vie sám vypočítať). Z vypočítaných nenulových hodnôt zovšeobecnených uzlových posunutí možno tiež veľmi jednoducho graficky znázorniť priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky zobrazením grafu funkcie $w_0(x,y)$ podľa vzťahu (8.19) pomocou funkcie Plot3D.

Výpočtový program je uvedený na obr. 7. V programe sme zaviedli okrajové podmienky, ktoré vyplývajú z podopretia dosky

$$(w_0)_2 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_2 = (w_0)_3 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_3 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_3 = \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_3 = (w_0)_4 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_4 = 0$$

a ktoré vyplývajú z jej symetrie

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_1 = 0$$

Po zavedení týchto podmienok sa sústava rovníc (8.21) zredukovala na päť globálnych rovníc

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \tag{8.28}$$

kde vektor neznámych je

$$\mathbf{u} = \left[(w_0)_1 \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)_2 \quad \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_2 \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)_4 \quad \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)_4 \right]^T \tag{8.29}$$

Program vypočítal maximálny priehyb dosky

$$w_{0\max} = (w_0)_1 = 0{,}0070\,\mathrm{m}$$

a s vypočítanými nenulovými numerickými hodnotami (8.29) vykreslil priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky podľa (8.24) s veľkým zväčšením priehybu (obr. 8).

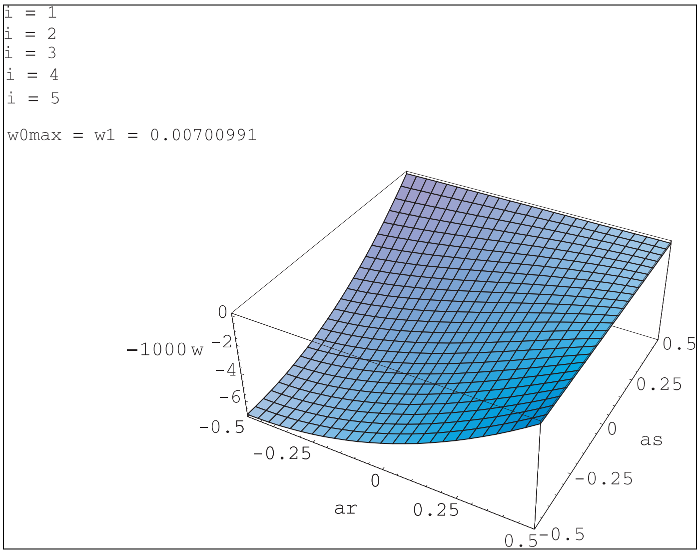
```
(* ŠTVORCOVÁ DOSKA *)
Off[General::spell]
(* Vstupné údaje *)
EE=10.^11; mi=0.25; h=0.01;p=1000.;
a=0.5;b=0.5;
(* Členy materiálovej matice D *)
D11=EE*h^3/(12*(1-mi^2)); D22=D11;
D12=D11*mi; D33=EE*h^3/(24*(1+mi));
(* Potrebné interpolačné funkcie prvku *)
r=x/a;s=y/b;
N1=1/16*(r-1)^2*(-r-2)(s-1)^2*(-s-2);
N6=a/16*(r+1)^2*(-r+1)(s-1)^2*(-s-2);
N8=-a*b/16*(r+1)^2*(1-r)(s-1)^2*(s+1);
N15=b/16*(r-1)^2*(-r-2)(s+1)^2*(-s+1);
N16=-a*b/16*(r-1)^2*(1+r)(s+1)^2*(1-s);
Ni={N1,N6,N8,N15,N16};
(* Príprava a vynulovanie vektorov a matíc *)
Nix=Table[0,{5}];
Niy=Table[0,{5}];
Nixy=Table[0,{5}];
f=Table[0,{5}];
KK=Table[0,{5},{5}];
(* Výpočet derivácií interpolačných funkcií *)
For[i=1,i<6,
Nix[[i]]=D[Ni[[i]],{x,2}];
Niy[[i]]=D[Ni[[i]],{y,2}];
Nixy[[i]]=D[Ni[[i]],x,y];
i++];
(* Výpočet matice tuhosti a vektora zaťaženia prvku *)
For[i=1,i<6,
For[j=1,j<6,
KK[[i,j]]=KK[[i,j]]+Integrate[D11*Nix[[i]]*Nix[[j]]+D22*Niy[[i]]*Niy[[j]]+
          D12*(Nix[[i]]*Niy[[j]]+Niy[[i]]*Nix[[j]])+
          4*D33*Nixy[[i]]*Nixy[[j]],{x,-a,a},{y,-b,b}];
j++];
f[[i]]=Integrate[p*Ni[[i]],{x,-a,a},{y,-b,b}];
Print["i = ",i];
i++];
(* Inverzia matice tuhosti *)
KKinv=Inverse[KK];
(* Riešenie sústavy rovníc-výpočet nenulových zovšeobecnených posunutí uzlových bodov *)
u=KKinv.f;
(* Výpis priehybu stredu dosky *)
Print["w0max = w1 = ", u[[1]]];
(* Vykreslenie priehybovej plochy symetrickej štvrtiny dosky *)
Off[General::spell]
w1=u[[1]];
wx2=u[[2]];
wxy2=u[[3]];
wy4=u[[4]];
wxy4=u[[5]];
w[x_,y_]=(N1*w1+N6*wx2+N8*wxy2+N15*wy4+N16*wxy4);
Plot3D[w[x,y]*(-1000),{x,-a,a},{y,-b,b},AxesLabel->{ar,as,-w*1000},ViewPoint→{1.3,-2.4,2.}];
```

Obr. 7

Kontrola výsledku je možná z analytického riešenia takejto dosky prevzatého z [Lit 2]

$$w_{0\max} = 0{,}045698\frac{pa_d^4}{Eh^3} = \frac{1000\cdot 2^4}{10^{11}\cdot 0{,}01^3} = 0.00731\,\mathrm{m}$$

Pre zaujímavosť uvádzame výsledky z programu ANSYS so škrupinovým štvoruzlovým prvkom SHELL63. Pri delení dosky na 2x2 prvky $w_{0\max} = 0{,}00578\,\mathrm{m}$ a pri delení 10x10 prvkov $w_{0\max} = 0{,}00724\,\mathrm{m}$.



Obr. 8

7. Nelineárny prvok von Kármánovej dosky

Pri tomto prvku budeme uvažovať von Kármánove pomerné deformácie geometricky nelineárnej dosky (8.5)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_o \tag{8.30}$$

skladajúce sa z membránových deformácií

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{8.31}$$

a z deformácií od priečneho zaťaženia (ktorými sme sa zaoberali v predchádzajúcej časti)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{8.32}$$

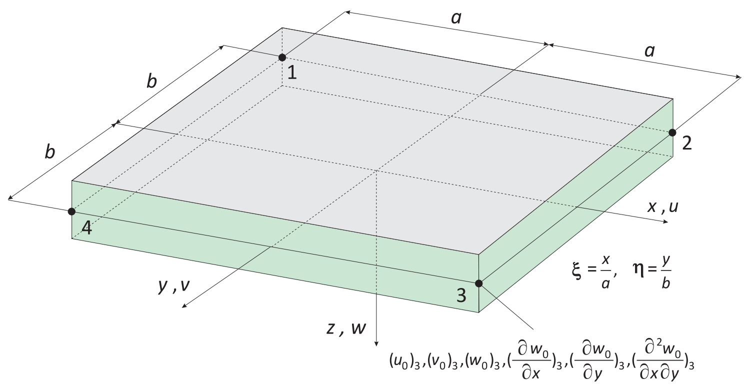
Vo výslednom deformačnom stave dosky dochádza pri takejto doske k väzbe lineárnych členov klasickej rovinnej napätosti a lineárnych členov klasickej Kirchhoffovej dosky (t.j. lineárnej dosko/steny) s kvadratickými člennmi gradientov funkcie priehybu dosky $w_0(x,y)$, čo v konečnom dôsledku vedie na nelineárnu maticu tuhosti prvku.

Uvažujme opäť pravouhlý štvoruzlový konečný prvok, ako v predchádzej časti, avšak teraz už so šiestimi stupňami voľnosti uzla (obr. 9), pretože v rovniciach rovnováhy prvku musíme zohľadňovať aj membránové posuvy uzlov $(u_0)_i$ a $(v_0)_i$.

Prvok bude mať 24 stupňov voľnosti vyjadrených uzlovými hodnotami v usporiadaní vhodnom pre kompaktný zápis matíc prvku

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \end{Bmatrix} = \{u1, u2, u3, u4, v1, v2, v3, v4, w1, w2, w3, \cdots, w16\}^T \tag{8.33}$$

s geometrickým významom podľa obr. 9, t.j. $u1=(u_0)_1$, $u2=(u_0)_2$ atď. ; $v1=(v_0)_1$, $v2=(v_0)_2$ atď. ; $w1=(w_0)_1$, $w2=(\dfrac{\partial w_0}{\partial x})_1$, $w3=(\dfrac{\partial w_0}{\partial y})_1$, $w4=(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y})_1$, $w5=(w_0)_2$ atď.



Obr. 9

Priehyb strednicovej plochy dosky budeme opäť aproximovať funkciou $w_0(x,y)$ udanou v (8.24) s nezmenenými interpolačnými funkciami (8.27).

Aproximačné funkcie membránových zložiek posunutia bodov strednicovej plochy prvku nech sú

$$
\begin{aligned}
u_0(x,y) &= n_1 u1 + n_2 u2 + n_3 u3 + n_4 u4 \\
v_0(x,y) &= n_1 v1 + n_2 v2 + n_3 v3 + n_4 v4
\end{aligned}
\tag{8.34}
$$

s bilineárnymi interpolačnými funkciami

$$
\begin{aligned}
n_1(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
n_2(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
n_3(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
n_4(x,y) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
\xi = x/a;& \quad \eta = y/b
\end{aligned}
\tag{8.35}
$$

Fyzikálne vzťahy membránovej deformácie sú [1]

$$
\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m = \frac{E}{1\text{-}\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1\text{-}\mu)/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{bmatrix}
\tag{8.36}
$$

a virtuálna práca vnútorných membránových síl

$$
\delta W_{\text{int}}^m = \int_{V_e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m dV = \int_{-h/2}^{h/2} (\int_{S_0^e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m dxdy)dz = \int_{S_0^e} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m dxdy
\tag{8.37}
$$

kde

$$
\mathbf{A} = h\mathbf{D}_m = \frac{hE}{1\text{-}\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1\text{-}\mu)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 & 0 \\ A12 & A22 & 0 \\ 0 & 0 & A33 \end{bmatrix}
\tag{8.38}
$$

Celková virtuálna práca vnútorných síl prvku je

$$
\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{int}}^m + \delta W_{\text{int}}^o = \int_{S_0^e} \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}_m\right)^T \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m dxdy + \int_{S_0^e} \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}_o\right)^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_o dS
\tag{8.39}
$$

Silové zložky membránového zaťaženia sú

$$
\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix}
\tag{8.40}
$$

a s prihliadnutím na (8.16) dostávame

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{S_0^e} \left\{ \delta\varepsilon_x^m \quad \delta\varepsilon_y^m \quad \delta\gamma_{xy}^m \right\} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} dxdy + \int_{S_0^e} \left\{ \delta\varepsilon_x^o \quad \delta\varepsilon_y^o \quad \delta\gamma_{xy}^o \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} dxdy \tag{8.41}$$

Podľa (8.31) a (8.32) pre virtuálne zmeny deformácií platí

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x^m \\ \delta\varepsilon_y^m \\ \delta\gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\delta u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\delta v_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\delta u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial\delta w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_o = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x^o \\ \delta\varepsilon_y^o \\ \delta\gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} \tag{8.42}$$

Na prvku budeme uvažovať len konštatný plošný tlak *p* (membránové zaťaženie budeme kvôli jednoduchosti predpokladať len v uzloch globálneho modelu dosky), takže pre virtuálnu prácu vonkajších síl platí

$$\delta W_{ext}^e = \int_{S_0^e} p\delta w_0 dS \tag{8.43}$$

Ak do (8.41) a (8.43) dosadíme aproximácie (8.34) a (8.24) a za virtuálne posunutie postupne vystriedame tieto funkcie a ich membránové a ohybové väzby s jednotkovými virtuálnymi hodnotami zovšeobecnených uzlových posunutí (ostatné rovné nule), dostaneme sústavu *24* nelineárnych uzlových rovníc rovnováhy prvku

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)\mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \tag{8.44}$$

kde $\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)$ je matica tuhosti prvku, $\mathbf{u}^e$ je stĺpcová matica (vektor) zovšeobecnených posunutí prvku a $\mathbf{f}^e$ je vektor uzlových zaťažení prvku od tlaku *p*.

Pre potreby zjednodušenia explicitného vyjadrenia členov matice tuhosti a vektora uzlových zaťažení prvku je výhodné zapísať (8.44) v tvare

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{Bmatrix} \tag{8.45}$$

kde pre členy submatíc platí

$$\left[K_{ij}^{11}\right]_{4x4} = \int_{S_0^e} \left(A_{11}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{12}\right]_{4x4} = \left[K_{ij}^{21}\right]_{4x4} = \int_{S_0^e} \left(A_{12}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y} + A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x} \right) dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{13}\right]_{4x16} = \frac{1}{2}\int_{S_0^e} \left[\frac{\partial n_i}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + 2A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right] dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{22}\right]_{4x4} = \int_{S_0^e} \left(A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{23}\right]_{4x16} = \frac{1}{2}\int_{S_0^e} \left[\frac{\partial n_i}{\partial y}\left(A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + 2A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial x}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \right] dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{31}\right]_{16x4} = \int_{S_0^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y} + A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x} \right) \right] dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{32}\right]_{16x4} = \int_{S_0^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y} + A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y}\left(A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x} + A_{22}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y} \right) \right] dxdy$$

$$\left[K_{ij}^{33}\right]_{16x16} = \int_{S_0^e} \left[D_{11}\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + D_{12}\left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) + 4D_{33}\frac{\partial^2 N_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x\partial y} \right] dxdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{S_0^e}\left\{\left[A_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\left[A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right.$$

$$\left.+2A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right\}dxdy \tag{8.46}$$

Pre subvektory zaťaženia prvku platí

$$\left\{\mathbf{f}^1\right\}_{4x1}=\mathbf{0}\,;\qquad \left\{\mathbf{f}^2\right\}_{4x1}=\mathbf{0}\,;\qquad \mathrm{f}_i^3=\int_{S_0^e}pN_i\,dxdy\,,\quad i=1,2,\cdots,16 \tag{8.47}$$

Ukážme si na príkladoch, ako možno dospieť ku vzťahom (8.46). Ak na prvok aplikujeme virtuálne posunutie

$$\delta u_0(x,y)=n_1(x,y)\,\delta u1\big|_{\delta u1=1} \tag{8.48}$$

z (8.41) dostaneme pre j = 1, 2, 3, 4 prvý riadok matice $\mathbf{K}^{11}$ (a analogickým vystriedaním $u1$ s $u2$, $u3$ a $u4$, celú submaticu $\mathbf{K}^{11}$)

$$\int_{S_0^e}\left\{\frac{\partial n_1}{\partial x}\quad 0\quad \frac{\partial n_1}{\partial y}\quad 0\quad 0\quad 0\right\}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial n_j}{\partial x}uj\\ 0\\ \frac{\partial n_j}{\partial y}uj\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}dxdy=uj\int_{S_0^e}\left(A_{11}\frac{\partial n_1}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{33}\frac{\partial n_1}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)dxdy=ujK_{1j}^{11}$$

Rovnakým spôsobom sa tvorí aj o niečo komplikovanejší príspevok od virtuálneho posunutia $\delta w_0(x,y)=N_1(x,y)\,\delta wj\big|_{\delta wj=1}$

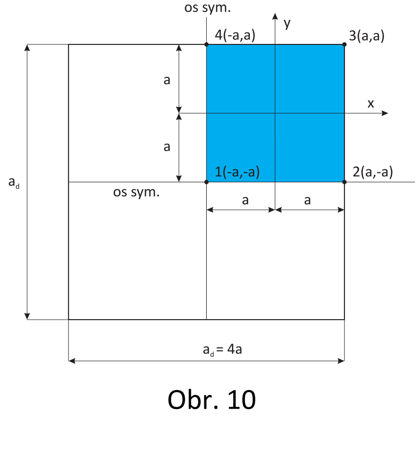
$$\int_{S_0^e}\left\{\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}wj\quad \frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}wj\quad \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}wj+\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}wj\right\}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\end{Bmatrix}dxdy+\int_{S_0^e}\left\{-\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\quad -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}\quad -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\partial y}\right\}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}wj\\ -\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}wj\\ -2\frac{\partial^2 N_j}{\partial x\partial y}wj\end{Bmatrix}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}wj\int_{S_0^e}\left\{\left[A_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\left[A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+2A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right\}dxdy$$

$$+wj\int_{S_0^e}\left[D_{11}\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}+D_{12}\left(\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}\right)+2D_{33}\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x\partial y}\right]dxdy=wjK_{1j}^{33}$$

8. Príklad - štvorcová na obvode tuho votknutá nelineárna doska zaťažená tlakom

Pomocou nelineárneho prvku von Kármánovej dosky určíme maximálny priehyb a znázorníme priehybovú plochu štvorcovej dosky (obr. 10) so stranou a_d = 2 m zaťaženej normálovým tlakom p = 1000 N/m^2, ktorá je tuho votknutá po obvode. Hrúbka dosky je 0,01 m a materiálové konštanty sú E = 10^{11} N/m^2 , μ = 0,25.



Obr. 10

Pri výpočte použijeme postup, ktorý sme opísali pri riešení príkladu lineárnej dosky. Vzhľadom na tuhé votknutie sa počet neznámych uzlových posunutí po zavedení okrajových podmienok zredukuje na jedinú neznámu $(w_0)_1$, čo je zároveň aj maximálny priehyb v strede dosky. Sústava rovníc pre určenie uzlových posunutí sa takto zmenila na jedinú nelineárnu rovnicu

$$(104838 + 7{,}37467 \cdot 10^8 w1^2) w1 = 250 \tag{8.49}$$

ktorej nelineárny tuhostný člen i náhradnú uzlovú silu *F* od spojitého tlaku pre jediný stupeň voľnosti dosky určil program uvedený na obr. 11. V tomto obrázku sme znázornili aj priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky od jednotkového priehybu *w*1.

Nelineárnu rovnicu (8.49) sme riešili Newton-Raphsonovou metódou [2] v jednoduchom programe na obr. 12 pre viacej prípadov zaťažovacieho tlaku. Napr. pre p = 1000 Pa program vypočítal maximálny priehyb dosky

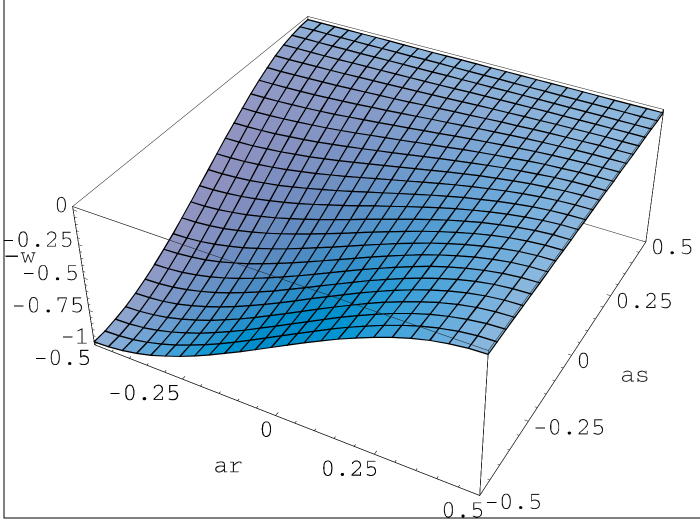
$$w_{0\max} = (w_0)_1 = 0{,}0022995\,\mathrm{m}$$

Na obr. 13 sme graficky znázornili nelineárny priebeh maximálneho priehybu dosky v závislosti od zaťažovacieho tlaku pomocou vypočítaných diskrétnych hodnôt.

```
(* VOTKNUTÁ NELINEÁRNA DOSKA *)
Off[General::spell];
EE=10.^11; mi=0.25; h=0.01;p=1000.;
a=0.5;b=0.5;
D11=EE*h^3/(12*(1-mi^2)); D22=D11;
D12=D11*mi; D33=EE*h^3/(24*(1+mi));
Q11=EE/(1-mi^2);Q22=Q11;
Q12=Q11*mi;Q33=EE/2/(1+mi);
A11=Q11*h;A12=Q12*h;A22=A11;A33=Q33*h;
r=x/a;s=y/b;
N1=1/16*(r-1)^2*(-r-2)(s-1)^2*(-s-2);
Nix=D[N1,{x,2}];Niy=D[N1,{y,2}];Nixy=D[N1,x,y];
Nx=D[N1,x];Ny=D[N1,y];
w0=N1*w1;dwx=D[w0,x];dwy=D[w0,y];
f=Integrate[p*N1,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom1=Integrate[D11*Nix*Nix+D22*Niy*Niy+D12*(Nix*Niy+Niy*Nix)+
          4*D33*Nixy*Nixy,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom2=0.5*Integrate[(A11*dwx^2+A12*dwy^2)*Nx*Nx+(A12*dwx^2+A22*dwy^2)*Ny*Ny
          +2*A33*dwx*dwy*(Nx*Ny+Ny*Nx),{x,-a,a},{y,-b,b}];
KK=pom1+pom2;
Print["KK = ",KK];
Print["f = ",f];
w[x_,y_]=N1*1.0;
Plot3D[-w[x,y],{x,-a,a},{y,-b,b},AxesLabel->{ar,as,-w}
,ViewPoint→{1.3,-2.4,2.}];
```

$KK = 104838. + 7.37467 \times 10^8\, w1^2$

f = 250.



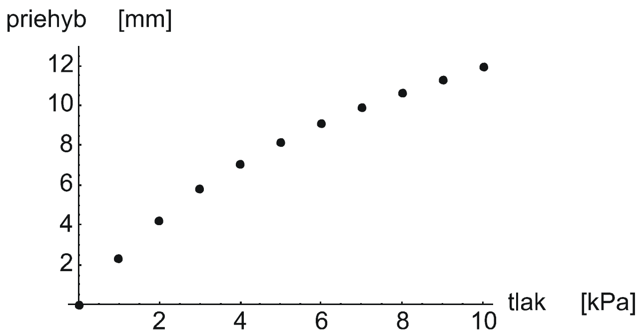
Obr. 11

```
NewtonRaphson[F_, uzac_, imax_, Rdov_] := Module[{},
 R[u_] = 104838 * u + 7.3747 * 10 ^ 8 * u ^ 3 - F;
 i = 0; u0 = uzac; u1 = u0;
 While[i < imax && Rdov < Abs[R[u1]], u0 = u1; u1 = u0 - R[u0]/R '[u0];
 i = i + 1;];];
F = 0;
For[k = 1, k < 11,
 F = F + 250;
 p = 4 * F;
 NewtonRaphson[F, 0, 20, 1];
 Print[" p = ", p, " Pa", "   u = ", PaddedForm[u1 * 1000, {6, 4}], " mm"];
 k++];

 p = 1000 Pa   u =   2.2995 mm
 p = 2000 Pa   u =   4.2350 mm
 p = 3000 Pa   u =   5.7903 mm
 p = 4000 Pa   u =   7.0615 mm
 p = 5000 Pa   u =   8.1356 mm
 p = 6000 Pa   u =   9.0670 mm
 p = 7000 Pa   u =   9.8892 mm
 p = 8000 Pa   u =  10.6293 mm
 p = 9000 Pa   u =  11.3032 mm
 p = 10000 Pa   u =  11.9233 mm
```

Obr. 12

```
ListPlot[{{0, 0}, {1, 2.2995}, {2, 4.235}, {3, 5.7903}, {4, 7.0615}, {5, 8.1356},
        {6, 9.067}, {7, 9.8892}, {8, 10.629}, {9, 11.3032}, {10, 11.9233}},
        PlotStyle → PointSize[0.02], AxesLabel → {"tlak [kPa]",
        "priehyb [mm]"}, PlotRange → {-0.2, 13}];
```



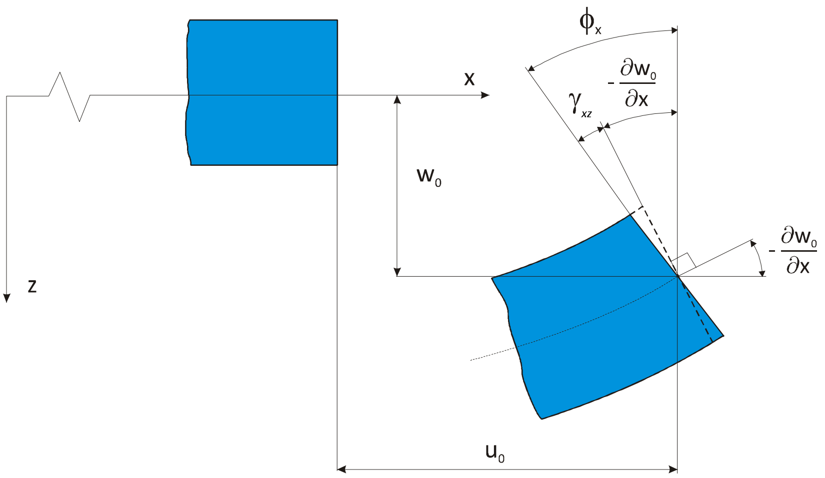
Obr. 13

8. Koncept Mindlin - Reissnerovej dosky

V tejto formulácii sa do vnútornej energie zaťaženej dosky zahŕňa aj energia vyvolaná priečnymi šmykovými deformáciami (skosmi γ_{xz} a γ_{yz}), ktorá sa pri klasických teóriách (Kirchhoff, von Kármán) zanedbáva. Vyžaduje si to potreba riešenia hrubších dosiek, ktoré vzhľadom na ich väčšiu ohybovú tuhosť (narastá s treťou mocninou hrúbky) sú navrhované na prenos väčšieho priečneho zaťaženia. Výpočet tejto energie sa zjednodušuje tak, že sa v priečnych rezoch predpokladá konštantný skos (a teda aj konštantné priečne šmykové napätie) po celej hrúbke dosky. Potom sa natočenie priečneho rezu zaťaženej dosky v rovine *xz* (a analogicky aj v rovine *xy*) účinkom skosu γ_{xz} zmení tak, ako je to znázornené na obr. 14 a pre funkcie posunutí bodov dosky na rozdiel od (8.1) sa zavádzajú vzťahy

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\phi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{8.50}$$

s neznámymi, a na funkcii priehybu strednicovej plochy dosky $w_0(x,y)$ nezávislými, funkciami $\phi_x(x,y)$ a $\phi_y(x,y)$. V tomto modeli mierne hrubej dosky sa potom objavuje päť neznámych polí zovšeobecnených posunutí $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$, kde ϕ_x a ϕ_y sú uhly udávajúce rotácie priečnych normál okolo osi *y* a *x* (obr. 14).



Obr. 14

Zviazanosť rotácie normál priehybovej plochy s uhlami dotyčníc k priehybovej ploche (s parciálnymi deriváciami funkcie priehybu w_0) sa takto vo vzťahoch (8.50) zrušila. To je spolu so zohľadnením priečnych deformácií základná charakteristika modelu Mindlin-Reissnerovej dosky a základné odlíšenie od klasickej teórie dosky. Dôsledkom takejto formulácie funkcií membránových posunutí je to, že napriek zohľadneniu šmykových deformácií a väčších možností využitia modelu je tvorba a programová implementácia konečných prvkov Mindlin-Reissnerovej dosky jednoduchšia ako v prípade horeuvedených klasických modelov (pre prvok dosky stačí tzv. C_0 kontinuita - zovšeobecnené uzlové posunutia prvku neobsahujú derivácie funkcií posunutia). V deformáciách, tj. v parciálnych deriváciách funkcií (8.50), sa už neobjavia druhé derivácie funkcie priehybu $w_0(x,y)$ a nároky na spojitosť aproximačných funkcií sa znížia. Je potom pochopiteľné, že skoro všetky komerčné programy založené na MKP, vrátane ANSYSu, využívajú takto formulované lineárne i nelineárne doskové konečné prvky.

9. Nelineárny prvok Mindlin-Reissnerovej dosky

Budeme postupovať rovnako ako pri nelineárnom prvku von Kármánovej dosky, ale s uvažovaním zmenených funkcií posunutí (8.50). Zložky deformácie všeobecného bodu dosky sa podľa (8.30)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_o$$

skladajú z deformácií od membránového zaťaženia (8.31), ktoré zostávajú bez zmeny

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{8.51}$$

ale významne sa zmení a zjednoduší deformačný príspevok od priečneho ohybového a krútiaceho zaťaženia (8.32)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_o = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{8.52}$$

Pribudnú teraz ešte aj deformácie (skosy) od priečnych síl (pozri obr. 14)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \tag{8.53}$$

Ako sme uviedli v úvode tejto časti, predpokladajú sa konštanté skosy po hrúbke dosky a teda aj konštantné hodnoty šmykových napätí τ_{xz} a τ_{yz} (po výške obdĺžnikového rezu je ich skutočný priebeh parabolický). Ich silové výslednice (priečne sily na rezoch s jednotkovou šírkou) potom sú

$$t_{xz} = k_s(h\cdot 1)\tau_{xz} = k_s hG\gamma_{xz} \qquad t_{yz} = k_s hG\gamma_{yz} \tag{8.54}$$

Opravný koeficient tohto zjednodušenia k_s , je známy z elementárnej pružnosti (výpočet energie šmykového napätia v ohýbanom nosníku; pre obdĺžnik k_s = 5/6). Virtuálna práca priečnych šmykových vnútorných síl na konečnom prvku potom v maticovom zápise je

$$\delta W_{\text{int}}^\gamma = \int_{S_0^e} \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma\right)^T \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma dxdy = \int_{S_0^e} \left\{ \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta\phi_x \quad \dfrac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \delta\phi_y \right\} \begin{bmatrix} k_s Gh & 0 \\ 0 & k_s Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} dxdy \tag{8.55}$$

Celková virtuálna práca vnútorných síl nelineárneho konečného prvku Mindlin-Reissnerovej dosky je

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{int}}^m + \delta W_{\text{int}}^o + \delta W_{\text{int}}^\gamma \tag{8.56}$$

kde pre tretí člen platí (8.55) a prvé dva členy sú

$$\delta W_{\text{int}}^m = \int_{S_0^e} \left\{ \dfrac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial \delta w_0}{\partial x} \quad \dfrac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial \delta w_0}{\partial y} \quad \dfrac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\dfrac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} dxdy \tag{8.57}$$

$$\delta W_{\text{int}}^o = \int_{S_0^e} \left\{ \dfrac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} \quad \dfrac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} \quad \dfrac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta\phi_y}{\partial x} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} dxdy \tag{8.58}$$

Vzťah (8.56) obsahuje päť virtuálnych posunutí $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta\phi_x, \delta\phi_y$, ktoré zohrávajú dôležitú úlohu pri tvorbe matice tuhosti prvku. Explicitné vyjadrenie členov matice tuhosti je jednoduchšie, keď sa po dosadení (8.55), (8.57), (8.58) do (8.56) a roznásobení, rozčlení virtuálna práca vnútorných síl na sumu piatich integrálov, do ktorých sa zahrnú len členy, ktoré obsahujú príslušné virtuálne posunutie. Potom platí

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{int}}^{\delta u0} + \delta W_{\text{int}}^{\delta v0} + \delta W_{\text{int}}^{\delta w0} + \delta W_{\text{int}}^{\delta\phi x} + \delta W_{\text{int}}^{\delta\phi y} \tag{8.59}$$

kde

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta u0} = \int_{S_0^e} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \left\{ A_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{12} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + A_{33} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \right) dxdy \tag{8.60}$$

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta v0} = \int_{S_0^e} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \left\{ A_{12} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{22} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + A_{33} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \right) dxdy \tag{8.61}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{\delta w0} = \int_{S_0^e} \Bigg\{ & \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} \left\{ A_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{12} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + k_s G h \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right] + A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \Bigg] \\ & + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \left[\frac{\partial w_0}{\partial y} \left\{ A_{12} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \right] + A_{22} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} + k_s G h \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \right] + A_{33} \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \Bigg] \Bigg\} dxdy \end{aligned} \tag{8.62}$$

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta\phi x} = \int_{S_0^e} \left\{ \frac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} \left[D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} D_{33} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right] + \delta\phi_x k_s G h \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \right\} dxdy \tag{8.63}$$

$$\delta W_{\text{int}}^{\delta\phi y} = \int_{S_0^e} \left\{ \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} \left[D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} D_{33} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right] + \delta\phi_y k_s G h \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \right\} dxdy \tag{8.64}$$

Aproximačné funkcie posunutia $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ sa na prvku v MKP určujú interpoláciou uzlových hodnôt pomocou interpolačných funkcií prvku; zapíšeme ich v tvare

$$u_0(x,y) = \sum_{j=1}^{m} u_j n_j(x,y) \qquad v_0(x,y) = \sum_{j=1}^{m} v_j n_j(x,y) \tag{8.65}$$

$$w_0(x,y) = \sum_{j=1}^{n} w_j N_j(x,y) \tag{8.66}$$

$$\phi_x(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \varphi_j(x,y) \qquad \phi_y(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varphi_j(x,y) \tag{8.67}$$

Uzlové hodnoty týchto funkcií usporiadame do vektora

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \\ \boldsymbol{\phi}_x^e \\ \boldsymbol{\phi}_y^e \end{Bmatrix} = \{u1, u2, \ldots, u\text{m}, v1, v2, \ldots, v\text{m}, w1, w2, \ldots, w\text{n}, \alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha\text{p}, \beta 1, \beta 2, \ldots, \beta\text{p}\}^T \tag{8.68}$$

Ak do (8.59) dosadíme aproximácie (8.65) až (8.67) a za virtuálne posunutie postupne vystriedame tieto funkcie a ich membránové, ohybové a šmykové väzby s jednotkovými virtuálnymi hodnotami zovšeobecnených uzlových posunutí (8.68) dostaneme sústavu nelineárnych uzlových rovníc rovnováhy prvku

$$\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)\mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \tag{8.69}$$

kde $\mathbf{K}^e(\mathbf{u}^e)$ je matica tuhosti prvku, $\mathbf{u}^e$ je stĺpcová matica (vektor) zovšeobecnených uzlových posunutí prvku a $\mathbf{f}^e$ je vektor uzlových zaťažení prvku. V blokovej forme má táto sústava rovníc rovnováhy prvku tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} & \mathbf{K}^{34} & \mathbf{K}^{35} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{43} & \mathbf{K}^{44} & \mathbf{K}^{45} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{53} & \mathbf{K}^{54} & \mathbf{K}^{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \\ \boldsymbol{\phi}_x^e \\ \boldsymbol{\phi}_y^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \end{Bmatrix} \tag{8.70}$$

Integrálne vzťahy pre členy jednotlivých submatíc v piatich riadkoch matice tuhosti prvku v (8.70) možno vyjadriť pomocou piatich častí celkovej virtuálnej práce vnútorných síl (8.60) až (8.64) a dostávame

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= \int_{S_0^e}\left(A_{11}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)dxdy \\
K_{ij}^{12} &= \int_{S_0^e}\left(A_{12}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y}+A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x}\right)dxdy; \\
K_{ij}^{13} &= \frac{1}{2}\int_{S_0^e}\left[\frac{\partial n_i}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+2A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial y}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]dxdy \\
K_{ij}^{22} &= \int_{S_0^e}\left(A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)dxdy \\
K_{ij}^{23} &= \frac{1}{2}\int_{S_0^e}\left[\frac{\partial n_i}{\partial y}\left(A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+2A_{33}\frac{\partial n_i}{\partial x}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]dxdy \\
K_{ij}^{31} &= \int_{S_0^e}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y}+A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x}\right)\right]dxdy \\
K_{ij}^{32} &= \int_{S_0^e}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(A_{12}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial y}+A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial x}\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y}\right)\right]dxdy \\
K_{ij}^{33} &= \int_{S_0^e}\left(k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy+\frac{1}{2}\int_{S_0^e}\left\{\left[A_{11}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right. \\
&\quad \left.+\left[A_{12}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+2A_{33}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right\}dxdy \\
K_{ij}^{34} &= \int_{S_0^e}k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial x}\varphi_j dxdy \\
K_{ij}^{35} &= \int_{S_0^e}k_sGh\frac{\partial N_i}{\partial y}\varphi_j dxdy \\
K_{ij}^{44} &= \int_{S_0^e}\left(D_{11}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}+D_{33}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}+k_sGh\varphi_i\varphi_j\right)dxdy \\
K_{ij}^{45} &= \int_{S_0^e}\left(D_{12}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}+D_{33}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right)dxdy \\
K_{ij}^{55} &= \int_{S_0^e}\left(D_{33}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}+k_sGh\varphi_i\varphi_j\right)dxdy \\
K_{ij}^{21} &= K_{ji}^{12} \qquad K_{ij}^{43}=K_{ji}^{34} \qquad K_{ij}^{53}=K_{ji}^{35} \qquad K_{ij}^{54}=K_{ji}^{45}
\end{aligned} \tag{8.71}$$

Ako sme už uviedli, doska je vo všeobecnosti zaťažená objemovými silami (vlastná tiaž, odstredivá sila), plošným tlakom, čiarovými i sústredenými silami, teplotným zaťažením a reakčnými silami a momentami od okrajových podmienok pre zovšeobecnené posunutia. Sústredené sily a momenty sa zadávajú priamo do uzlov globálneho modelu dosky, spojité zaťaženia prvkov ale treba transformovať do uzlov a ich sumárny účinok v *e*-tom prvku predstavuje v (8.69) vektor vonkajších uzlových zaťažení prvku $\mathbf{f}^e$. Príspevky spojitých zaťažení prvku do vektora $\mathbf{f}^e$ sa určujú z virtuálnej práce vonkajších síl [Lit. 1]. Napr. vonkajšie uzlové sily prvku od plošného tlaku *p* dostaneme opäť z (8.43)

$$\delta W_{ext}^e = \int_{S_0^e} p\,\delta w_0 dS$$

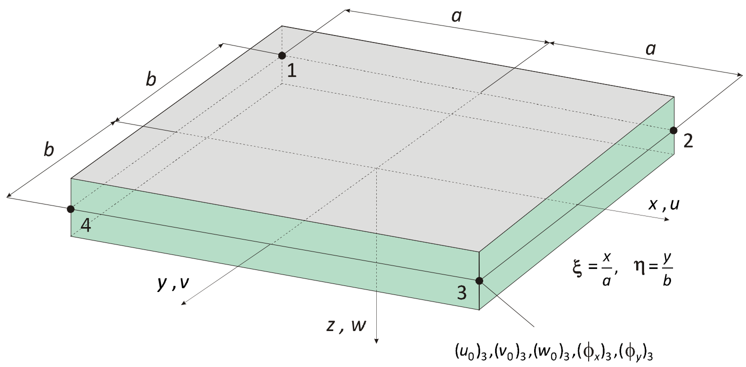
Z podstaty MKP pri riešení pevnostných úloh vyplýva, že vo všeobecnosti výpočtový model je o niečo tuhší ako reálne teleso (reálna konštrukcia). Pri niektorých typoch prvkov, a najmä pri hrubšej prvkovej sieti, sa však zaznamenal omnoho výraznejší nereálny nárast tuhosti modelu účinkom nežiadúceho blokovania (lockingu) deformácií. Jeho prejavom je tiež spomalenie konvergencie a i prípadná numerická nestabilita riešenia úlohy. Medzi prvky silne citlivé na tento fenomén patria aj prvky Mindlin-Reissnerovej dosky, najmä ak sa využívajú interpolačné funkcie nižšieho stupňa (lineárne a kvadratické) pri hrubom delení modelu. V tomto prípade je nositeľom tohto javu nereálne vysoká tuhosť vyvolaná priečnymi šmykovými deformáciami (transverse shear locking) a to pri štíhlych (relatívne tenkých) doskách. Ak napr. vyvoláme priehyb dosky čistým ohybom (okrajovými momentami) vzťah (8.53) nevie zabezpečiť nulové priečne šmykové deformácie, pribudne nereálna tuhosť, ktorá zmenší priehyb dosky. Analogický problém vzniká aj pri tenkých doskách s malými priečnymi silami. Korekcia tuhosti modelov takýchto dosiek sa robí najčastejšie selektívnou numerickou integráciou pri výpočte členov matice tuhosti prvkov. Plná integrácia sa robí pri ich výpočte z lineárnej tuhosti a redukovaná pri určovaní členov od priečnej šmykovej a nelineárnej tuhosti. Existuje množstvo ďalších postupov a v odbornej literatúre možno nájsť viacero návrhov tzv. *locking free* doskových prvkov. Aby sme v doleuvedenom ilustračnom príklade nedostali nereálne výsledky eliminovali sme približne vplyv tohto fenoménu pomocou jednoduchej opravy koeficientu k_s podľa vzťahu [Lit2]

$$\frac{1}{k_s^e} = 1 + 0{,}2\frac{S_0^e}{25h^2} \tag{8.72}$$

10. Príklad - Pravouhlý štvoruzlový nelineárny prvok Mindlin-Reissnerovej dosky

Uvažujme opäť pravouhlý štvoruzlový konečný prvok, ako v predchádzich častiach, avšak teraz so stupňami voľnosti uzla Mindlin-Reissnerovej dosky. Takýto prvok, s bilineárnymi interpolačnými funkciami (8.35) pre všetky aproximačné funkcie posunutí, má v uzloch po štyri a celkovo dvadsať stupňov voľnosti (obr. 15)

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0^e \\ \mathbf{v}_0^e \\ \mathbf{w}_0^e \\ \boldsymbol{\phi}_x \\ \boldsymbol{\phi}_y \end{Bmatrix} = \left\{u1,u2,u3,u4,v1,v2,v3,v4,w1,w2,w3,w4,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right\}^T \tag{8.73}$$



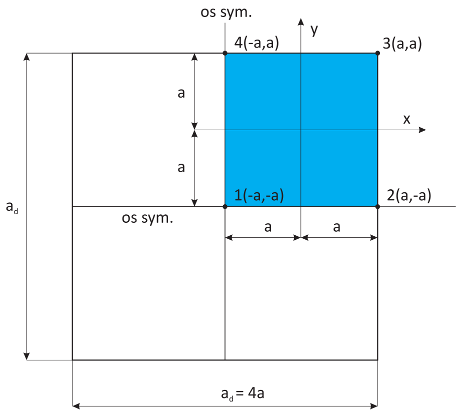
Obr. 15

Pravda, v prípade potreby možno voliť aj interpolačné funkcie vyššieho stupňa pre jednotlivé vektory zovšeobecnených posunutí. V našom príklade, aby sme mohli bez väčšej zmeny použiť program z predchádzajúceho príkladu a tiež kvôli väčšej presnosti nášho hrubého delenia, zvolíme aproximačnú funkciu priehybu strednicovej plochy dosky s interpolačnými funkciami (8.27)

$$w_0(x,y) = \sum_{j=1}^{16} w_j N_j(x,y) \tag{8.74}$$

čím sa počet stupňov voľnosti prvku zvyšuje na tridsať dva.

Pomocou nelineárneho prvku Mindlin-Reissnerovej dosky určíme maximálny priehyb a znázorníme priehybovú plochu štvorcovej dosky (obr. 16) so stranou a_d = 2 m zaťaženej normálovým tlakom p = 100000 N/m^2, ktorá je tuho votknutá po obvode. Hrúbka dosky je 0,08 m a materiálové konštanty sú E = 10^8 N/m^2 , μ = 0,25.



Obr. 16

Pri výpočte použijeme postup, ktorý sme opísali pri riešení príkladu lineárnej dosky. Vzhľadom na tuhé votknutie sa počet neznámych uzlových posunutí po zavedení okrajových podmienok zredukuje na jedinú neznámu $\left(w_0\right)_1$, čo je zároveň aj maximálny priehyb v strede dosky. Sústava rovníc pre určenie uzlových posunutí sa takto zmenila na jedinú nelineárnu rovnicu

$$(1{,}26781 \cdot 10^6 + 5{,}89974 \cdot 10^6 w1^2) w1 = 25000 \tag{8.75}$$

ktorej nelineárny tuhostný člen i náhradnú uzlovú silu F od spojitého tlaku pre jediný stupeň voľnosti dosky určil program uvedený na obr. 17. V tomto obrázku sme znázornili aj priehybovú plochu symetrickej štvrtiny dosky od vypočítaného priehybu $w1$ s programom na obr.18.

Nelineárnu rovnicu (8.49) sme riešili Newton-Raphsonovou metódou [2] v jednoduchom programe na obr. 18 pre viacej prípadov zaťažovacieho tlaku. Pre p = 100000 Pa program vypočítal maximálny priehyb dosky

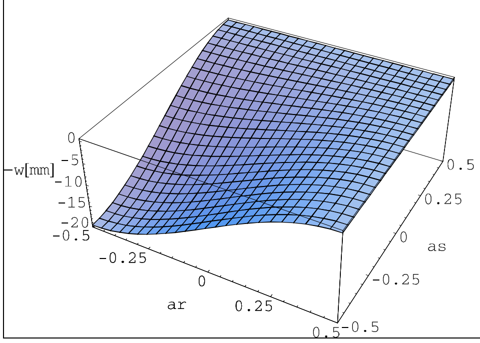
$$w_{0\max} = \left(w_0\right)_1 = 0{,}019684\,\mathrm{m} = 19{,}684\,\mathrm{mm}$$

Na obr. 19 sme graficky znázornili nelineárny priebeh maximálneho priehybu dosky v závislosti na zaťažovacom tlaku pomocou vypočítaných diskrétnych hodnôt.

```
(* VOTKNUTÁ NELINEÁRNA MINDLIN-REISSNEROVA DOSKA *)
Off[General::spell];
EE=10.^8; mi=0.25; h=0.08;p=100000.;
a=0.5;b=0.5;
D11=EE*h^3/(12*(1-mi^2)); D22=D11;
D12=D11*mi; D33=EE*h^3/(24*(1+mi));
Q11=EE/(1-mi^2);Q22=Q11;
Q12=Q11*mi;Q33=EE/2/(1+mi);
A11=Q11*h;A12=Q12*h;A22=A11;A33=Q33*h;
ks=1/(1+0.2*4*a*b/25/h^2);
r=x/a;s=y/b;
N1=1/16*(r-1)^2*(-r-2)(s-1)^2*(-s-2);
Nix=D[N1,{x,2}];Niy=D[N1,{y,2}];Nixy=D[N1,x,y];
Nx=D[N1,x];Ny=D[N1,y];
w0=N1*w1;dwx=D[w0,x];dwy=D[w0,y];
f=Integrate[p*N1,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom1=Integrate[ks*Q33*h*Nx*Nx+ks*Q33*h*Ny*Ny,{x,-a,a},{y,-b,b}];
pom2=0.5*Integrate[(A11*dwx^2+A12*dwy^2)*Nx*Nx+(A12*dwx^2+A22*dwy^2)*Ny*Ny
    +2*A33*dwx*dwy*(Nx*Ny+Ny*Nx),{x,-a,a},{y,-b,b}];
KK=pom1+pom2;
Print["KK = ",KK];
Print["f = ",f];
w[x_,y_]=N1*19.684;
Plot3D[-w[x,y],{x,-a,a},{y,-b,b},AxesLabel->{ar,as,-w[mm]}
,ViewPoint→{1.3,-2.4,2.}];
```

$KK = 1.26781 \times 10^6 + 5.89974 \times 10^6 \, w1^2$

f = 25000.



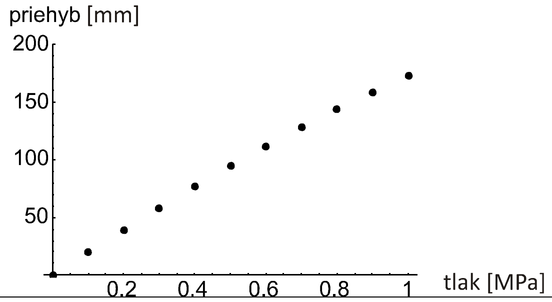
Obr. 17

```
NewtonRaphson[F_, uzac_, imax_, Rdov_] := Module[{},
 R[u_] = 1267810 * u + 5.89974 * 10 ^ 6 * u ^ 3 - F;
 i = 0; u0 = uzac; u1 = u0;
 While[i < imax && Rdov < Abs[R[u1]], u0 = u1; u1 = u0 - R[u0] / R '[u0];
  i = i + 1;];];
F = 0;
For[k = 1, k < 11,
 F = F + 25000;
 p = 4 * F;
 NewtonRaphson[F, 0, 20, 10];
 Print[" p = ", p, " Pa", "    u = ", PaddedForm[u1 * 1000, {6, 4}], " mm"];
 k++];

 p = 100000 Pa   u =  19.6836 mm
 p = 200000 Pa   u =  39.1587 mm
 p = 300000 Pa   u =  58.2386 mm
 p = 400000 Pa   u =  76.7751 mm
 p = 500000 Pa   u =  94.6494 mm
 p = 600000 Pa   u =  111.8100 mm
 p = 700000 Pa   u =  128.2230 mm
 p = 800000 Pa   u =  143.8890 mm
 p = 900000 Pa   u =  158.8270 mm
 p = 1000000 Pa   u =  173.0690 mm
```

Obr. 18

```
ListPlot[{{0, 0}, {.1, 19.6836}, {.2, 39.1587}, {.3, 58.2386}, {.4, 76.7751}, {.5, 94.6494},
    {.6, 111.81}, {.7, 128.223}, {.8, 143.889}, {.9, 158.827}, {1., 173.069}},
    PlotStyle → PointSize[0.02], AxesLabel → {"tlak [MPa]",
    "priehyb [mm]"}, PlotRange → {-0.2, 200}];
```



Obr. 19

Literatúra

[Lit 1] Reddy, J. N.: An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford University Press, 2004

[Lit.2] ANSYS, Theoretical Manual, Shell Element 93

[1] Benča, Š.: Výpočtové postupy MKP pri riešení lineárnych úloh mechaniky. Vydavateľstvo STU v Bratislave, 2006

[2] Benča, Š.: Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP. Nakladateľstvo STU v Bratislave, 2009