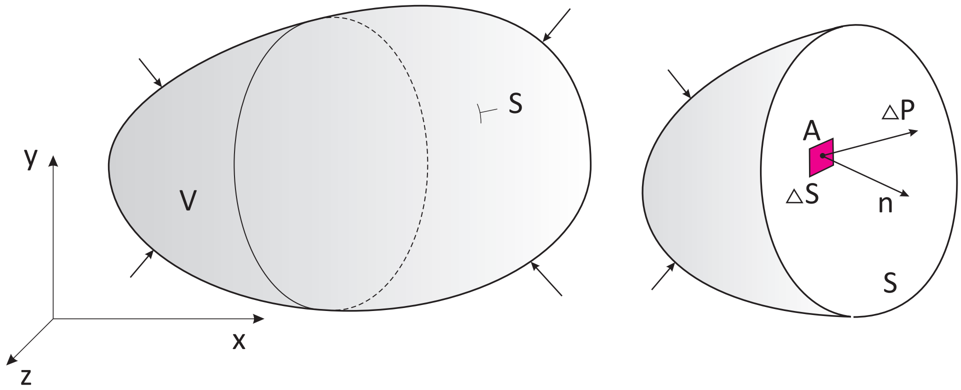
D2. Napätie. Diferenciálne rovnice rovnováhy. Princíp virtuálnych posunutí

Napätie

Uvažujme v kartézskom súradnicovom systéme priestorové deformovateľné teleso a zaťažme ho statickou sústavou vonkajších síl. Sústava zaťažujúcich síl je v rovnováhe, obsahuje i reakčné sily v miestach upevnenia telesa. Účinkom týchto síl sa teleso zdeformuje a jeho východzia objemová a plošná konfigurácia V_0, S_0 sa zmení na aktuálnu konfiguráciu V, S (obr. 2.1).



Obr. 2.1

Keď je teleso v rovnováhe, potom musí byť v rovnováhe aj každá jeho časť. Ak teleso rozrežeme *mysleným* rezom na dve časti, tak je zrejmé, že pokiaľ tieto časti majú zostať naďalej v rovnováhe, musia na seba pôsobiť v myslenom reze vnútornými silami, ktoré ich rovnováhu zabezpečujú. Zo šiestich statických podmienok rovnováhy napísaných pre odrezanú časť vieme síce v myslenom reze určiť výslednice vnútorných síl (čo v elementárnej náuke o pružnosti a pevnosti pomáha pri riešení tzv. základných prípadov namáhania telies jednoduchých tvarov) vo všeobecnom prípade však nevieme, ako sú vnútorné sily rozdelené po uvažovanom reze a navyše treba vytvoriť aj mierku na posudzovanie miery namáhania telesa v jeho všeobecnom bode.

Ak v myslenom reze vyčleníme okolo bodu A veľmi malú plošku ΔS, situácia sa zjednoduší. Na malej ploške možno vnútorné sily spriemerovať a nahradiť silovou výslednicou $\Delta\mathbf{P}$ (na veľmi malej ploške je momentový účinok vnútorných síl zanedbateľný) a za mieru namáhania telesa v tomto mieste sa potom volí pomer $\Delta\mathbf{P}/\Delta S$, ktorý sa pri limitnom zmenšení plochy ΔS nazýva *napätie*

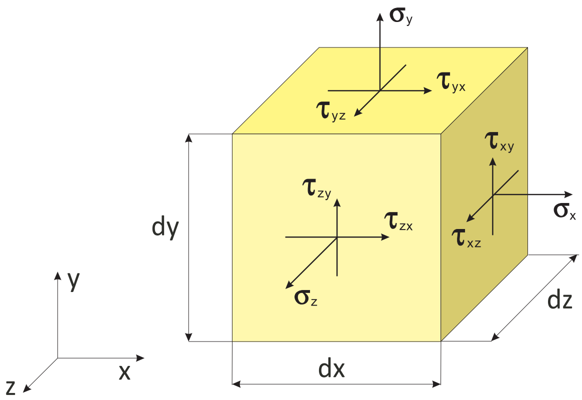
$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{P}}{dS} \tag{2.1}$$

Napätie vyjadrené tvare (2.1) je silový vektor vzťahovaný na jednotku plochy, ktorý však je ešte aj funkciou smeru normály rezovej plochy (jej ortogonálneho jednotkového vektora $\mathbf{n}$), pretože cez bod A možno preložiť nekonečne veľa rezových rovín.

Transformácia napätia na pravouhlé roviny diferenciálneho elementu

Predpokladajme špeciány prípad, keď rezové roviny cez bod A sú rovnobežné so súradnicovými rovinami. V takom prípade možno vektory napätia na troch elementárnych ploškách $dS_x = dydz$, $dS_y = dxdz$ a $dS_z = dxdy$ (obr. 2.2) rozložiť do zložiek

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_1) &= \sigma_x \mathbf{e}_1 + \tau_{xy}\mathbf{e}_2 + \tau_{xz}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_2) &= \tau_{yx} \mathbf{e}_1 + \sigma_y\mathbf{e}_2 + \tau_{yz}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3) &= \tau_{zx} \mathbf{e}_1 + \tau_{zy}\mathbf{e}_2 + \sigma_z\mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{2.2}$$



Obr. 2.2

kde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sú jednotkové vektory v smere súradnicových osí a deväť hodnôt σ_x, τ_{xy}, ..., σ_z sú zložky vektorov napätia na diferenciálnych ploškách bodu telesa, ako je to znázornené na obrázku. Napäťové zložky σ_x, σ_y, σ_z sa nazývajú *normálové napätia*, zložky τ_{xy} τ_{yx} τ_{xz} τ_{zx} τ_{yz} τ_{zy} sú *šmykové napätia*. Napätie má vlastnosti tenzora druhého rádu a zapisuje sa ako matica 3x3 s rôznym značením a indexovaním jej členov

$$\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Dá sa dokázať, že je to symetrický tenzor

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$
$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

a preto sa v aplikačnej mechanike, i v MKP, pracuje len so šiestimi zložkami napätia, často zapisovaných do stĺpcovej matice - (pseudo)vektora

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T \tag{2.4}$$

Vyjadrenie všeobecného napätia v jeho rovine pomocou zložiek

Cauchyho veta o napätí hovorí, že pomocou napätí v troch na sebe nezávislých rovinách idúcich cez bod *A*, možno jednoznačne vyjadriť napätie v ľubovoľnej rezovej rovine idúcej cez tento bod. Vyjadrime jednotkový normálový vektor takejto všeobecnej rezovej roviny v tvare

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_1 + n_y \mathbf{e}_2 + n_z \mathbf{e}_3 \tag{2.5}$$

kde n_x, n_y, n_z sú smerové kosínusy vektora $\mathbf{n}$ v danom súradnicovom systéme. Potom napätie v rezovej rovine bude súčtom priemetov vektorov napätia z troch rovín elementu do smeru vektora $\mathbf{n}$

$$\mathbf{p} = n_x \mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_1) + n_y \mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_2) + n_z \mathbf{p}(\mathbf{n} = \mathbf{e}_3)$$

čo s využitím (2.2) dáva

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = & \left(\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z\right) \mathbf{e}_1 \\ & + \left(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z\right) \mathbf{e}_2 \\ & + \left(\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z\right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

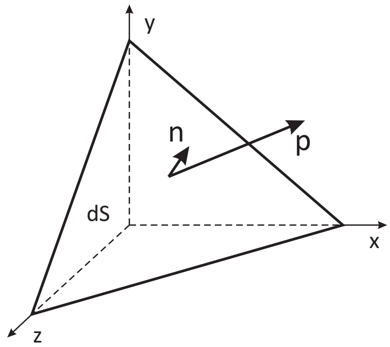
a v stručnom skalárnom indexovom zápise

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \tag{2.7}$$

Je to napätie, ktoré vyjadruje účinok odstránenej časti elementu (odstránených zložiek tenzora napätia) na rovinu *dS* (obr. 2.3). Často sa využíva pri písaní silových okrajových podmienok (pre plošný tlak alebo ťah) na povrchu telesa - pozri napr. (2.14).

Analýza napätia v bode telesa

Pri analýze napätosti v bode telesa (z rovníc rovnováhy odrezanej časti elementu na obr. 2.3)



Obr. 2.3

sa využíva vzťah (2.7) v ktorom sa zohľadňuje symetria tenzora napätia a platí

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \tag{2.8}$$

alebo v názornejšom maticovom tvare už len so šiestimi nezávislými zložkami napätia

$$[\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{n}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \{\mathbf{p}\} \tag{2.9}$$

Nakláňaním rezovej roviny (zmenou smerových kosínusov n_x , n_y , n_z) môžeme pri zadanom vektore napätia $\{\mathbf{p}\}$ skúmať zmeny zložiek napätia a vyjadrovať ich hodnoty pri špeciálnych typoch napätosti.

Diferenciálne rovnice rovnováhy

V mechanike kontinua pri tzv. *úlohe okrajových hodnôt* poznáme hodnoty (funkcie) posunutí a zaťažení na okraji telesa a hľadáme funkcie posunutí, deformácií a napätí vo vnútri telesa. Pri analytickom riešení úlohy sa často vychádza z (parciálnych) diferenciálnych rovníc úlohy (hľadané funkcie sú vyjadrené vo forme gradientov funkcií), ktoré treba riešiť pri zadaných okrajových, príp. i začiatočných podmienkach. V staticky zaťaženom telese, ktoré je v rovnovážnom stave, gradienty napätia sa pri prechode z bodu $A(x,y,z)$ do bodu $A'(x+dx, y+dy, z+dz)$ nemôžu meniť nezávisle, ale musia spĺňať diferenciálne podmienky rovnováhy. Tieto podmienky zaručia, že aj diferenciálna časť telesa bude v silovej rovnováhe.

Z týchto úvah vyplýva, že ak na telese v rovnováhe vyčleníme časť s objemom V s povrchovou plochou S, potom integrácia napätia **p** (2.6) resp. (2.7) po ploche S, čiže výslednica povrchových síl, sa musí rovnať nule

$$\int_{\mathrm{S}} \mathbf{p}\, d\mathrm{S} = \int_{\mathrm{S}} \sigma_{ji} n_j\, d\mathrm{S} = \int_{\mathrm{S}} \sigma_{ji}\, d\mathrm{S}_j = 0$$

pretože aj táto časť musí byť v rovnováhe.

V telese však môžu pôsobiť objemové sily $\{\mathbf{b}\} = b_i(x,y,z)$, t.j. sily na jednotku objemu, ako vlastná tiaž, odstredivá sila, magnetické sily, ktoré musíme tiež zahrnúť do podmienok rovnováhy

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V b_i dV = 0$$

Pomocou Gaussovej vety o divergencii[1] aplikovanej v tomto prípade na trojrozmerný priestor a tenzorovú veličinu σ_{ji} môžeme plošný integrál v uvedenom vzťahu transformovať na objemový

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i \right) dV = 0$$

a pretože tento vzťah platí pre ľubovoľný objem telesa, musí byť integrand rovný nule a dostávame skalárne *diferenciálne rovnice (podmienky) rovnováhy telesa*

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

Pri zohľadnení symetrie tenzora napätia možno túto rovnicu prepísať na

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \tag{2.10}$$

a rovnice potom môžeme používať len so šiestimi nezávislými zložkami napätia

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Týmto diferenciálnym rovniciam musí pri daných okrajových podmienkach vyhovieť každé pole mechanického napätia $\sigma_{ij}(x,y,z)$ na spojitom objeme telesa, pokiaľ má spĺňať podmienky statickej rovnováhy.

Na záver treba pripomenúť, že napätie, s ktorým sme sa zaoberali v tejto časti, je tzv. *Cauchyho (skutočné) napätie*, pretože sme ho definovali na zdeformovanom (skutočnom, aktuálnom) tvare (objeme) telesa a pôsobilo na ploške, udanej a vytvorenej jeho aktuálnymi súradnicami *xyz*; je to práve tá mierka napätia, ktorú potrebujeme poznať pre hodnovernú tuhostnú a pevnostnú kontrolu zaťaženého telesa. Pri jeho hľadaní z diferenciálnych rovníc alebo z integrálnych variačných vzťahov sa nevyhneme potrebe integrovať premenné po neznámom zdeformovanom objeme telesa. S tým sú spojené, žiaľ, pri nelineárnych úlohách (veľké posunutia, veľké rotácie, veľké deformácie, nelineárne vlastnosti materiálu a i.) značné nepríjemnosti. (Pozri základné príručky nelineárnej mechaniky kontinua, príp. v [2] formuláciu geometricky nelineárnych prvkov a kap. 11 *Spojité teleso - teoretické minimum*)

Pri lineárnych úlohách predpokladáme, že vplyv rozdielnej polohy, tvaru a objemu aktuálnej konfigurácie oproti začiatočnej (vzťažnej, východzej) konfigurácii telesa je zanedbateľný a úlohu riešime na známej začiatočnej konfigurácii. Napätie, ktoré určíme na tejto konfigurácii, považujeme za Cauchyho napätie.

---

[1]Podľa Gaussovej vety platí $\int_S X\mathbf{n}dS = \int_V \nabla X dV$, kde *X* je skalárna, vektorová, alebo tenzorová veličina

Princíp virtuálnych posunutí

Princíp virtuálnych posunutí (deformačná verzia princípu virtuálnych prác) patrí k základným východiskám pre deformačnú formuláciu metódy konečných prvkov. Je to jedna z foriem integrálneho (energetického) vyjadrenia podmienok rovnováhy deformovateľného telesa.

Princíp virtuálnych posunutí odvodíme z diferenciálnych podmienok telesa (2.10), ktoré kvôli zjednodušeniu zápisu medzivýsledkov zapíšeme v najjednoduchšej forme

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{2.12}$$

Nech na ploche S_u telesa sú zadané deformačné (posuvové) okrajové podmienky $\overline{u}_i$ a na ploche S_p silové podmienky (zaťaženie) vo forme plošného ťahu so zložkami $\overline{p}_i$ (sústredené sily neuvažujeme, možno ich zahrúť priamo do výsledku). Potom pre teleso platia diferenciálne podmienky rovnováhy (2.12)

so základnými (Dirichletovými) okrajovými podmienkami

$$u_i = \overline{u}_i \qquad \text{na } S_u \tag{2.13}$$

a prirodzenými (Neumanovými) okrajovými podmienkami

$$\sigma_{ij} n_j = \overline{p}_i \qquad \text{na } S_p \tag{2.14}$$

kde plocha telesa $S = S_u \cup S_p$, $S_u \cap S_p = 0$, a n_j sú zložky jednotkového vektora normály plochy S_p.

Aplikujme teraz na teleso virtuálne (myslené, zvolené) spojité funkcie posunutí $\delta u_i(x,y,z)$, ktoré v mieste zadaných reálnych posunutí sú nulové

$$\delta u_i = 0 \qquad \text{na } S_u \tag{2.15}$$

Potom pre teleso podľa (2.12) dostávame

$$\left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i = 0$$

a integrál po objeme telesa sa musí tiež rovnať nule

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i dV = 0 \tag{2.16}$$

Pretože v (2.16) môžme funkcie δu_i ľubovoľne meniť, tento vzťah platí vtedy a len vtedy, keď sú splnené diferenciálne podmienky rovnováhy (keď výraz v zátvorke sa rovná nule). Dostali sme takto inú formu vyjadrenia podmienok rovnováhy telesa.

Pomocou vzorca pre derivovanie súčinu $\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)_{,j} = \sigma_{ij,j}\delta u_i + \sigma_{ij}\delta u_{i,j}$ môžeme (2.16) upraviť na

$$\int_V \left[\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)_{,j} - \sigma_{ij}\delta u_{i,j} + b_i \delta u_i\right] dV = 0$$

kde opäť použijeme Gaussovu vetu o divergencii a transformujeme prvý člen v tomto vzťahu na plošný integrál

$$\int_V \left(-\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + b_i \delta u_i\right) dV + \int_S \left(\sigma_{ij}\delta u_i^p\right) n_j dS = 0 \tag{2.17}$$

ktorý sa podľa (2.14) a (2.15) zmení na

$$\int_V \left(-\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + b_i \delta u_i\right) dV + \int_{S_p} \overline{p}_i \delta u_i^p \, dS = 0 \tag{2.18}$$

kde δu_i^p sú zložky virtuálneho posunutia na ploche S_p.

Vzhľadom na symetriu tenzora napätia, a známy vzťah pre tenzor deformácie ε_{ij} [D1], môžeme napísať

$$\sigma_{ij}\delta u_{i,j} = \sigma_{ij}\left[\frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right)\right] = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$$

a dostávame výsledný vzťah

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_{S_p} \bar{p}_i \delta u_i^p \, dS \tag{2.19}$$

Integrandy v tomto vzťahu sú skalárne hodnoty, ktoré majú rozmer práce [Nm] a vzťah (2.19) sa takto zaraďuje do kategórie energetických podmienok rovnováhy. Je to matematické vyjadrenie princípu virtuálnych posunutí, ktorý hovorí, že ak na teleso v rovnováhe aplikujeme kinematicky prípustné virtuálne posunutia, tak virtuálna práca vnútorných síl sa rovná virtuálnej práci vonkajších síl, v stručnom zápise

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \tag{2.20}$$

Pod pojmom virtuálna práca sa myslí práca reálnych silových veličín (napätia, vonkajších síl) vykonaná na virtuálnych posunutiach. Napätie a vonkajšie sily sa pri tomto myslenom experimente nemenia, sú nezávislé na virtuálnych posunutiach. Všimnime si tiež, že v podmienkach rovnováhy telesa (2.19) sú už, na rozdiel od diferenciálnych podmienok rovnováhy, explicitne vyjadrené silové okrajové podmienky.

Ak je teleso rozdelené na sieť konečných prvkov, tak podmienky rovnováhy (2.19) platia aj pre konečný prvok a v MKP sa princíp virtuálnych posunutí často využíva na formuláciu lineárnych i nelineárnych konečných prvkov.