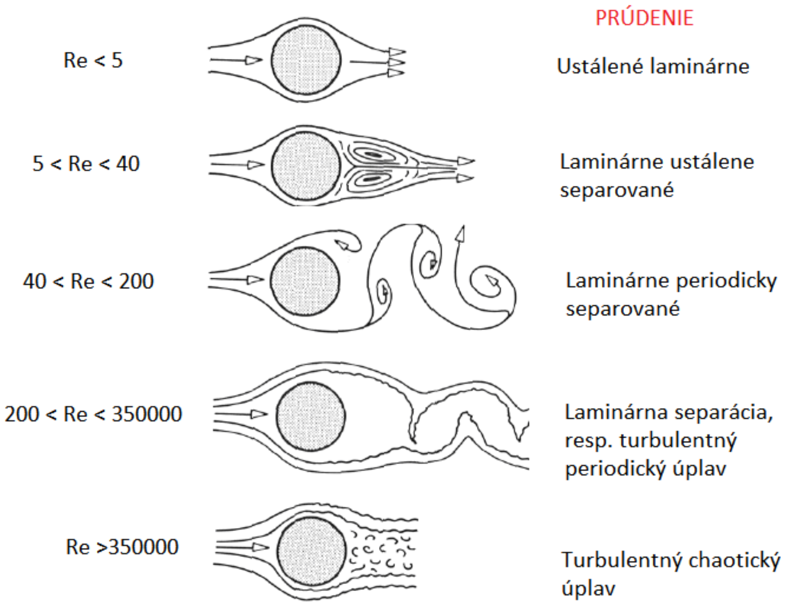
D 20 Turbulencia

Turbulentné prúdenie a jeho modelovanie

Pri zvyšovaní rýchlosti prúdenia tekutiny, presnejšie povedané pri zväčšovaní Reynoldsovho čísla [D19], laminárne prúdenie prechádza cez určitú prechodovú fázu do plne rozvinutého turbulentného prúdenia (obr. 1). Takmer všetky prípady prúdenia tekutín s ktorými sa stretávame v technickej praxi i v bežnom živote, patria do kategórie turbulentného prúdenia.



Obr. 1 *Zmeny prúdenia v úplave obtekaného telesa (kresba podľa experimentu)*

Pre turbulentné prúdenie je, okrem iného, charakteristické priestorové, náhodne lokalizované, nestacionárne kolísanie rýchlosti a ďalších charakteristík prúdu. Na základe rozboru Navier-Stokesových (N-S) rovníc i nákladných počítačových experimentov s ich priamym numerickým riešením sa verí, že popisujú aj turbulentné prúdenie v celej komplexnosti, jedná sa však o takú zložitú sústavu nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc s fyzikálnou zviazanosťou premenných, že analytické riešenie tejto sústavy nie je známe (bez nerealistických zjednodušení) ani pre veľmi jednoduché kontrolné objemy.

Hlavné charkteristiky turbulencie sú:

- **Nestálosť** (nepravidelnosť, náhodnosť). Experimentálne pozorovanie turbulentného prúdenia pomocou dymového zásobníka alebo zafarbením prúdu tekutiny potvrdilo, že jeho štruktúry (obrazce) sú náhodné a chaotické, bez akéhokoľvek náznaku opakovania (obr. 2), čo vyvolalo používanie štatistických metód a ich pojmov (priemerné hodnoty, korelácie a pod.) pri analýze turbulentného prúdenia. Z tejto charakteristiky vyplýva tiež to, že turbulentné nestacionárne fluktuácie sú vždy trojrozmerné.

Obr. 2 *Ukážka štruktúr turbulentného prúdu*

- **Vírivosť.** Turbulentný prúd obsahuje veľké množstvo priestorovo i časovo nestálych rotujúcich vírov rôznej veľkosti. Vo všeobecnosti sa ich rozmery menia od veľkosti porovnateľnej s rozmerom kontrolného objemu, až po rozmery, kde dominuje molekulárna difúzia. Najmenšie rozmery turbulentných štruktúr sú však vždy omnoho väčšie ako molekulárne a nenarušujú predpoklad kontinua zavedený v základných rovniciach prúdenia. Vzájomná interakcia vírov prenáša kinetickú energiu od väčších k najmenším (tzv. energetická kaskáda), kde sa účinkom viskózneho trenia premieňa na teplo.

- **Disipácia.** Pomerná strata dodávanej kinetickej energie pri turbulentnom prúdení jej premenou na teplo je niekoľkonásobne vyššia ako pri laminárnom.
- **Difúzia.** Turbulentné fluktuácie rýchlosti a vírivosť prispieva k efektívnemu transportu hybnosti, tepla a koncentrácie. Vysoká difuzivita, omnoho efektívnejšia ako čistá molekulárna difúzia, je ďalšou charakteristikou turbulentného prúdenia. Táto vlastnosť turbulencie sa výhodne využíva v rôznych technických zariadeniach a technológiách.

Z uvedeného vyplýva, že pri analýze úloh s turbulentným prúdením sa môžeme oprieť len o numerické metódy a procedúry. V princípe je možné každé turbulentné prúdenie *numericky* simulovať pomocou exaktných N-S rovníc (metóda DNS – *Direct Numerical Simulation*). Tu sa však naráža na nepríjemný problém spojený s veľmi vysokými nárokmi na geometrickú diskretizáciu vyšetrovanej oblasti a dostatočne hustú diskretizáciou časového intervalu sledovaného deja. Tieto požiadavky sú zatiaľ neprijateľné pre inžinierske analýzy turbulentného prúdenia a pre vysoké hodnoty Reynoldsovho čísla je zatiaľ takéto riešenie nerealizovateľné. K tomu ešte treba dodať, že inžiniersky záujem sa pri problémoch prúdenia sústreďuje predovšetkým na hlavné technicky využiteľné charakteristiky prúdenia bez väčšieho záujmu o presné časové fluktuácie aj tých najmenších vírov.

Výsledkom kombinácie zložitosti problému a pragmatických úvah o forme a presnosti výsledkov bol vznik a zatiaľ neustávajúca tvorba numericky zvládnuteľných a experimentami kalibrovaných *modelov* turbulentného prúdenia.

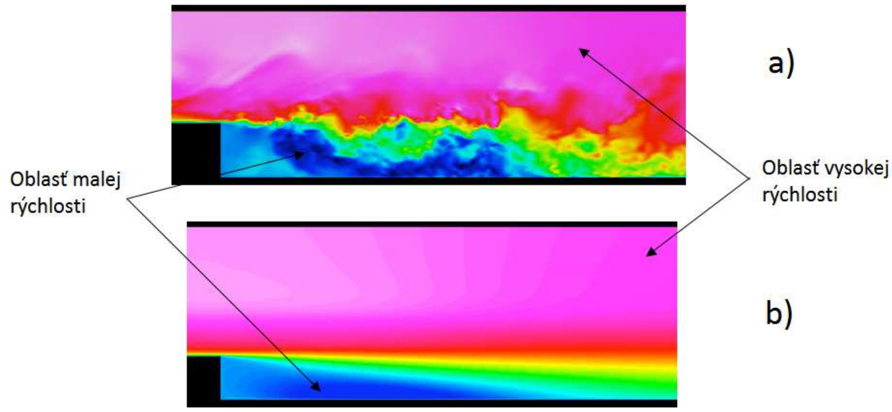
Numerické modelové riešenie problému prúdenia prostriedkami CFD (*Computational Fluid Dynamics* - Výpočtová dynamika tekutín) obyčajne pozostáva z týchto hlavných krokov: Tvorba geometrie a výpočtovej siete, voľba a nastavenie fyzikálneho výpočtového modelu a nakoniec výpočet s analýzou výsledkov. Tieto kroky sú užívateľsky relatívne jednoducho zvládnuteľné s výnimkou správnej voľby a nastavenia výpočtového modelu turbulencie a odhadu správnej hustoty výpočtovej siete. Vyplýva to jednak z toho, že zatiaľ neexistuje univerzálny model a dokonca ani najvhodnejší model pre špeciálne prípady turbulentného prúdenia (všetky modely majú určité obmedzenia) a tiež z toho, že nesprávna voľba modelu alebo jeho nastavenia a nesprávna hustota výpočtovej siete može mať veľký vplyv na presnosť výsledkov, nehovoriac o ich úplnej nedôveryhodnosti.

Pri voľbe modelu turbulentného prúdenia treba zohľadniť fyzikálne vlastnosti a špecifiká analyzovaného prúdenia, vlastné alebo sprostredkované skúsenosti s využívaním modelu v rovnakej alebo blízkej skupine úloh, potrebnú mieru presnosti výsledkov spolu s časom a hardvérom, ktorý je k dispozícii. No a v neposlednej miere poznať možnosti a obmedzenia zvoleného modelu spolu s vedomosťami o správnej voľbe jeho vstupných parametrov.

Väčšina často využívaných modelov turbulencie sa dá zahrnúť do dvoch skupín podľa základných rovníc, ktoré využívajú. Je to skupina Reynoldsovsky spriemerovaných N-S rovníc (RANS – *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) a skupina, ktorá využíva rovnice simulujúce veľké víry (LES - *Large Eddy Simulation*).

RANS rovnice popisujú turbulentné a transportné vlastnosti prúdenia pomocou *priemerných* (stredných) hodnôt, pričom takéto modelovanie sa používa (na rozdiel od LES modelov) pre turbulentné fluktuácie v celej ich rozmerovej škále. Modelové zjednodušenie vedie na výrazné zníženie nárokov na pamäťovú kapacitu i strojový čas počítača, pravda, výsledkom sú približné priemerné hodnoty prúdenia v turbulentnej oblasti (obr. 3). Štatisticko-priemerovací proces vnáša neznáme turbulentné korelácie (nové neznáme – Reynoldsove napätia a toky) do spriemerovaných rovníc prúdenia. Nové neznáme reprezentujú aproximáciu vplyvu reálnych turbulentných fluktuácií a ich počet s potrebnými rovnicami pre ich určenie predstavuje základnú charakteristiku konkrétneho modelu. Do tejto skupiny patria často využívané modely ako: Spalart-Allmarasov model, modely k-ε, k-ω a ich variácie a i.

LES modely obsahujú časovo závislú simuláciu, ktorá explicitne vyrieši vplyv veľkých vírov s využitím "filtrovaných" N-S rovníc a ostatné vplyvy sa riešia modelovaním turbulencie tak, ako v prvej skupine. Filtrovanie je v podstate matematická manipulácia exaktných N-S rovníc na odstránenie vírov, ktoré sú menšie ako zvolená filtrovacia mierka, ktorá pri priestorovom filtrovaní je určená najčastejšie hustotou výpočtovej siete. Výsledkom je vyššia presnosť ale (najmä pri vyšších hodnotách Reynoldsovho čísla) pri podstatne vyšších nárokoch na výpočtové prostiedky, hustotu diskretizácie i výpočtový čas oproti modelom z prvej skupiny. Často sa preto táto procedúra kombinuje s využitím tzv. *stenových funkcií* (využívajú sa aj pri predchádzajúcej skupine), čo umožňuje na veľkej časti kontrolného objemu podstatne znížiť hustotu výpočtovej siete. Podobne ako Reynoldsovo priemerovanie filtrácia generuje nové neznáme, pre ktoré sa vytvárajú modelové rovnice, aby kompletná sústava rovníc bola riešiteľná.



Obr. 3. *Zjednodušenie turbulentného prúdenia v mieste náhlej zmeny prierezu časovým priemerovaním.*
a) nestacionárna situácia, b) výsledok modelového riešenia

RANS rovnice a Reynoldsove napätia

Na základe Reynoldsovho dekompozičného princípu možno nestacionárnu, spojite alebo diskrétne nameranú náhodne fluktujúcu veličinu rozložiť na jej priemernú (strednú) časť a na odchýlku od priemeru. Pre zložky rýchlosti v lokalite (x,y,z) a čase t možno tento rozklad zapísať v tvare

$$v_i = \overline{v}_i + v_i' \tag{1}$$

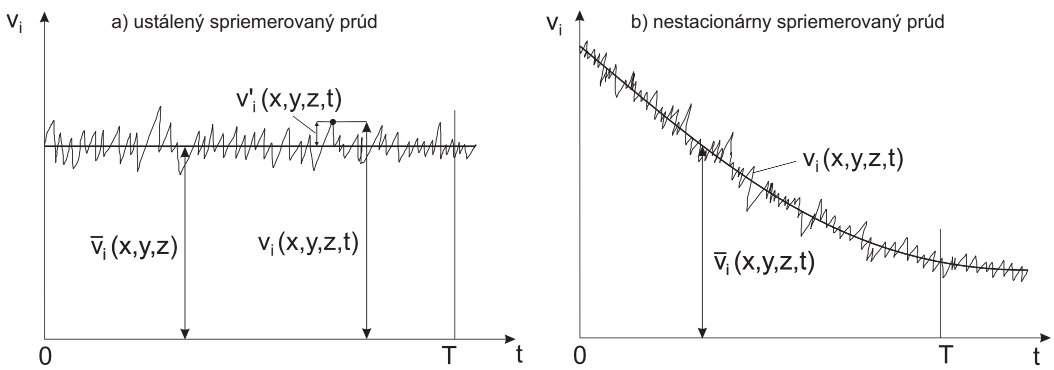
kde

$$\overline{v}_i(x,y,z,t) = \frac{1}{T}\int_0^T v_i(x,y,z,t)dt \tag{2}$$

je priemerná (stredná) hodnota i-tej zložky rýchlosti (obr. 4) a pre spriemerovanú fluktuačnú odchýlku v_i' od priemernej hodnoty platí

$$\overline{v_i'} = \frac{1}{T}\int_0^T v_i'(x,y,z,t)dt = 0 \tag{3}$$

Časový interval určený časom T musí byť v tomto prípade (existujú aj iné metódy priemerovania) veľký, aby výsledky priemerovania boli štatisticky ustálené.



Obr. 4 *Časová závislosť zložky rýchlosti a jej priemernej hodnoty* $\overline{v}_i$

Analogický rozklad možno uplatniť aj pre ďalšie (skalárne) hodnoty vystupujúce v základných rovniciach prúdenia (rovnica energie, dodatočné termodynamické vzťahy)

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \tag{4}$$

kde ϕ predstavuje skalárnu veličinu ako tlak, teplotu, energiu, entalpiu a i.

Dosadením priemerných hodnôt neznámych premenných do sústavy základných diferenciálnych rovníc prúdenia, s uplatnením (3) a využitím pravidiel matematickej manipulácie s priemernými hodnotami a ich odchýlkami, dostaneme novú *modelovú* sústavu diferenciálnych rovníc prúdenia vhodnú pre numerické spracovanie a počítačové riešenie. Napr. rovnica kontinuity a N-S pohybové rovnice [D19] sa pre newtonovskú tekutinu s $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ a nestacionárnu úlohu zmenia na

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \overline{v}_i\right) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \overline{v}_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{v}_i \overline{v}_j\right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_k}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho \overline{v_i' v_j'}\right) \tag{6}$$

Rovnice (5) a (6) sa nazývajú N-S rovnice s Reynoldsovým spriemerovaním, stručne RANS rovnice (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*). V rovniciach sa však objavili nové neznáme $\left(-\rho \overline{v_i' v_j'}\right)$ s rozmerom napätia (tzv. Reynoldsove napätia), ktoré sa musia modelovať, inak povedané príslušný model RANS musí obsahovať dodatočné rovnice na ich určenie, aby celá sústava rovníc daného modelu bola riešiteľná.

Pre prúdenie stlačiteľných tekutín možno rovnice (5) a (6) interpretovať ako N-S rovnice s Favreovým spriemerovaním, pri ktorom rýchlosti predstavujú spriemerované hodnoty podľa hustoty a rovnice možno analogicky použiť pre modelové riešenie úloh s premenlivou hustotou.

Boussinesqova hypotéza

Tenzor Reynoldsovho napätia je symetrický, takže v RANS rovniciach sa objavilo 6 neznámych – tri normálové Reynoldsove napätia $-\left(\rho \overline{u'u'}\right)$, $-\left(\rho \overline{v'v'}\right)$, $-\rho\left(\overline{w'w'}\right)$ a tri šmykové $-\left(\rho \overline{u'v'}\right)$, $-\left(\rho \overline{u'w'}\right)$, $-\left(\rho \overline{v'w'}\right)$. Tvorba šiestich rovníc pre potrebu modelovania spriemerovaných *pohybových* rovníc sa spravidla nahradzuje jednoduchším postupom. Často sa využíva Bussinesqova hypotéza, podľa ktorej tieto zložky možno vyjadriť pomocou gradientov zložiek priemernej rýchlosti, turbulentnej kinetickej energie na jednotku hmotnosti $k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'}$ a turbulentnej (vírovej) viskozity μ_t

$$-\left(\rho \overline{v_i' v_j'}\right) = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\left(\rho k + \mu_t \frac{\partial \overline{v}_n}{\partial x_n}\right)\delta_{ij} \tag{7}$$

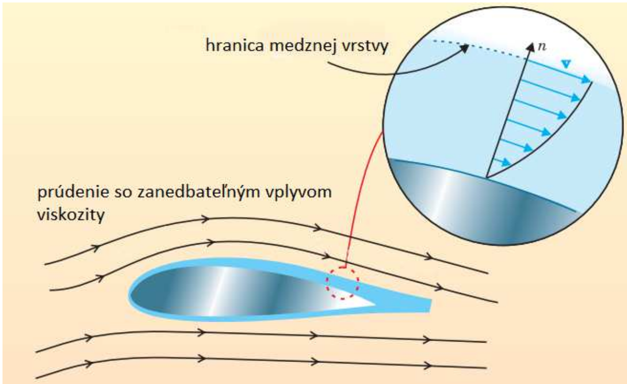
Dostávame tak potrebné rovnice pre určenie Reynoldsových napätí, v ktorých už treba modelovať pomocou vhodnej dodatočnej rovnice len jedinú neznámu, turbulentnú viskozitu μ_t. Takýto model sa často nazýva aj *jednorovnicový* model. Turbulentná viskozita má rovnaký rozmer ako dynamická viskozita, ale je to charakteristika turbulentného prúdenia a nie vlastnej tekutiny. Takto môžme relatívne jednoducho dosť hrubým spôsobom aproximovať turbulentné prúdenie ako prúdenie pseudotekutiny s lokálne sa meniacou "efektívnou" viskozitou ($\mu_{ef} = \mu + \mu_t$), ktorá aproximuje turbulenciu difúziou hybnosti a iných vlastnosti prúdiacej tekutiny.

Bez ohľadu na to, akým spôsobom sa určuje μ_t, využitie Bussinesqovej hypotézy vždy vnáša do modelovania niekoľko nezanedbateľných limitujúcich obmedzení. Mimo iného predpokladá, že víry majú vlastnosti ako molekuly, že turbulencia je izotropná a že existuje lokálna rovnováha medzi napätím a deformáciou. Napriek týmto nedostatkom je Boussinesqova aproximácia základom viacerých (v programoch CFD využívaných) modelov turbulencie.

Modelovanie prúdenia v blízkosti steny

Tenká vrstva prúdiacej tekutiny priliehajúca k stene telesa sa vyznačuje špecifickými vlastnosťami a nazýva sa *medzná vrstva.* Pretože viskózna tekutina má na stene nulovú rýchlosť (prilipne na stenu), v medznej vrstve dochádza v normálovom smere k veľkým zmenám (gradientom) rýchlosti - od nulovej hodnoty až po hodnotu blízku rýchlosti voľného (stenou neovplyvneného) prúdu. Obyčajne sa za hranicu medznej oblasti považujú body, kde lokálna rýchlosť dosahuje 95 až 99 % rýchlosti voľného, stenou neovplyvneného prúdu.

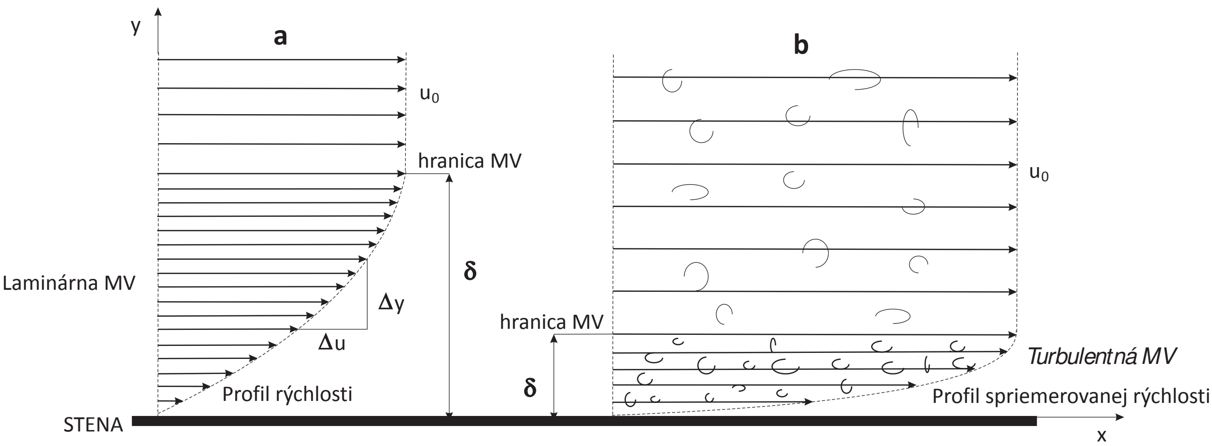
Priekopníci základov teórie medznej vrstvy (Prandtl, Blasius, Kárman a i.) v prvej polovici dvadsiateho storočia otvorili možnosti približného analytického riešenia Navier-Stokesových rovníc pre reálnu (viskóznu) tekutinu rozdelením oblasti prúdenia na medznú vrstvu s významným vplyvom viskóznych síl a okolitú oblasť s prevládajúcim účinkom zotrvačných síl a prakticky zanedbateľným vplyvom viskozity (obr. 5).



Obr. 5 *Medzná vrstva a oblasť prúdenia s malým vlyvom viskozity*

V neviskóznej oblasti pri konštantnej hustote sa použili Eulerove rovnice, pričom sa vplyv malej oblasti medznej vrstvy zanedbával. Riešil sa aj špeciálny prípad separácie prúdu (odtrhnutia medznej vrstvy od steny), kedy vplyv medznej vrstvy na mimostenovú oblasť v oblasti tzv. úplavu je významný. Pre oblasť medznej vrstvy sa vytvorili zjednodušené Navier-Stokesove rovnice (tzv. rovnice medznej vrstvy), ktoré už pre niektoré jednoduché prípady boli riešiteľné, ale hlavne umožňovali porozumieť a určovať prakticky dôležité veličiny ako odporová sila (koeficient odporu), dynamický vztlak, šmykové napätie tekutiny na stene a i.

Pravda, okolité voľné prúdenie významne ovplyvňuje charakteristiky medznej vrstvy. Vplyv majú predovšetkým tie veličiny prúdenia, ktoré rozhodujú o pomere zotrvačných a viskóznych síl (rýchlosť, hustota, viskozita a tvar steny telesa), t.j. Reynoldsovo číslo. Pri konkrétnych prípadoch prúdenia sa potom možno stretnúť s laminárnou medznou vrstvou (obr. 6a) alebo turbulentnou medznou vrstvou (obr. 6b).



Obr. 6 *Charakteristiky laminárnej (a) a turbulentnej (b) medznej vrstvy*

Z hľadiska užívateľa softvéru CFD je oblasť medznej vrstvy dôležitá kvôli správnej voľbe hustoty siete prvkov (MKP), resp. buniek (MKO) výpočtového modelu. Voľbou hustoty výpočtovej siete volíme hustotu integračných bodov v ktorých sa pre danú úlohu vyčísľujú hodnoty hľadaných funkcií. Pri nevhodnej (riedkej) sieti v oblasti veľkých gradientov funkcií sú vypočítané hodnoty nepresné a znehodnotia výsledky v celej oblasti (v lepšom príde zlyhá konvergencia riešenia, čo nás upozorní na problém so sieťou).

Ako je naznačené na obr. 5a gradienty rýchlosti ($\Delta u/\Delta y \rightarrow du/dy$) v laminárnej medznej vrstve sú mierne, hrúbka medznej vrstvy δ je relatívne veľká a dostatočné hustá sieť pri stene sa dá ľahko odhadnúť. Na základe analytického riešenia laminárneho obtekania pozdĺž tenkej dosky by sieť mala spĺňať podmienku

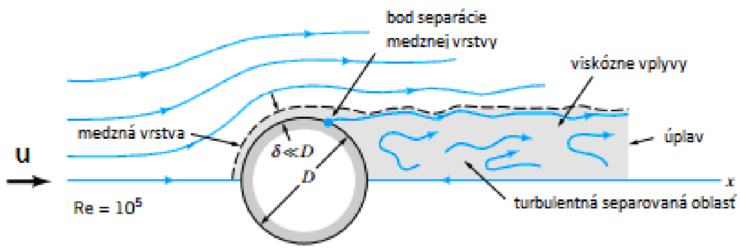
$$y_1 \leq \sqrt{\frac{\upsilon \ell}{u_0}} \tag{8}$$

kde je υ kinematická viskozita tekutiny
ℓ vzdialenosť meraná pozdĺž steny od začiatočného bodu medznej vrstvy
u_0 rýchlosť voľného prúdu
y_1 vzdialenosť ťažiska priliehajúcej buňky po stenu

Pri internom laminárnom prúdení v potrubiach a kanáloch má v oblasti rozvinutého prúdenia rýchlostný profil parabolický tvar a zmena rýchlostného gradientu a teda aj zmena hustoty siete po priereze sa dá určiť analyticky. Hustota siete v takomto prípade sa skôr riadi požiadavkou na kvalitu zobrazenia rýchlostného profilu a iných premenných v numerickom postprocesore programu.

Naopak pri turbulentnom prúdení je hrúbka medznej vrstvy výrazne menšia, gradienty spriemerovanej rýchlosti blízko steny sú vysoké a zvyšujú sa so zvyšovaním Reynoldsovho čísla. Charakteristika turbulentnej medznej vrstvy je komplikovanejšia a nájdenie správnej hustoty siete zložitejšie.

Základnú štruktúru a vzťahy pre turbulentnú medznú vrstvu opíšeme pre pomery plne rozvinutého ustáleného nestlačiteľného prúdenia pozdĺž hladkej širokej rovinnej steny v smere *x*. Počiatok rovinného súradnicového systému *(*x,*y)* zvolíme na stene, *y*-ová súradnica teda predstavuje normálovú vzdialenosť bodu od steny. Vzťahy, ktoré uvedieme platia v podstate aj pre prúdenie v uzatvorených kanáloch a potrubí. Pomery pri obtekaní telies sú analogické, komplikuje ich však problém odtrhnutia medznej vrstvy pri zvyšovaní Reynoldsovho čísla a s tým spojené zložitejšie pomery v úplave za telesom (obr.7).



Obr. 7 *Odtrhnutie medznej vrstvy*

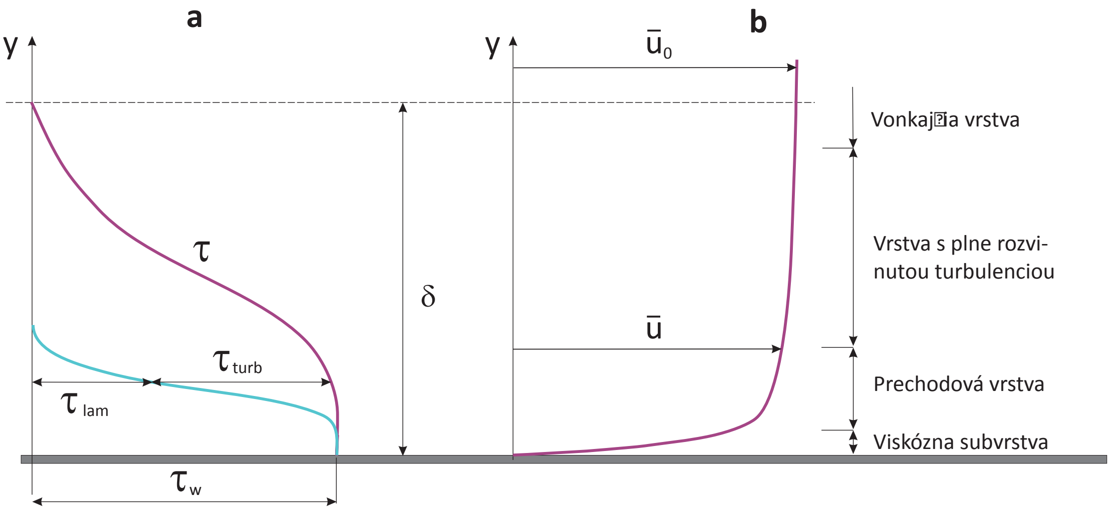
Pre šmykové napätie pri stene na základe Bussinesqovej hypotézy a analógie s laminárnym prúdením platí vzťah

$$\tau_{turb} = -\overline{\rho u' v'} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{9}$$

Veľmi blízko pri stene sú turbulentné fluktuácie vzhľadom na malú rýchlosť prúdu (malé lokálne Reynoldsovo číslo) a tiež z dôvodu ich tlmenia bezprostrednou blízkosťou steny veľmi malé a v superpozičnom vzťahu

$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{10}$$

prevláda viskózne šmykové napätie (obr. 8a). Táto oblasť sa nazýva *viskózna subvrstva* (obr. 8b). Vo vonkajšej časti medznej vrstvy sa už naplno rozvinulo turbulentné prúdenie s klesajúcim šmykovým napätím, ktoré za hranicou medznej vrstvy vo vzdialenosti δ od steny už vo voľnom prúde s rýchlosťou $\overline{u}_0$ je zanedbateľne malé. Prechod medzi viskóznou a turbulentnou vrstvou tvorí prechodová vrstva, kde sa uplatňujú v určitom pomere viskózne i turbulentné efekty.



Obr. 8 *Typický priebeh šmykového napätia (a) a rýchlostného profilu (b) turbulentnej medznej vrstvy*

Pretože viskózna subvrstva je veľmi tenká a rýchlosť sa v nej mení od nulovej hodnoty až takmer na rýchlosť voľného prúdu, možno profil rýchlosti v tejto vrstve považovať za lineárny s konštantným gradientom

$$\frac{d\overline{u}}{dy} = \frac{\overline{u}}{y} = \text{konšt} \tag{11}$$

a pre tzv. *stenové šmykové napätie* vo viskóznej subvrstve potom podľa Newtonovho zákona viskozity [D19] platí

$$\tau_w = \mu\frac{\overline{u}}{y} = \rho\upsilon\frac{\overline{u}}{y} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\upsilon\overline{u}}{y} \tag{12}$$

Vyplýva z toho tiež, že stenové šmykové napätie τ_w je po celej hrúbke viskóznej subvrstvy konštantné (obr.8a).

Odmocnina z τ_w/ρ má rozmer rýchlosti a ujal sa pre ňu názov *trecia rýchlosť*

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho} \tag{13}$$

Po jej dosadení do (12) možno rýchlostný profil vo viskóznej subvrstve vyjadriť v bezrozmernej forme

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau}{\upsilon}y \tag{14}$$

pretože pomer υ/u_τ (tzv. viskózna dĺžka) má rozmer dĺžky. Experimenty potvrdzujú dobrú platnosť rovnice (14) pre hladké steny v rozmedzí $0 \le yu_\tau/\upsilon \le 5$. Potom pre približný odhad hrúbky viskóznej subvrstvy platí

$$\delta_v \approx \frac{5\upsilon}{u_\tau} \approx \frac{25\upsilon}{\overline{u}_{v\max}} \approx \frac{25\upsilon}{\overline{u}_0} \tag{15}$$

Hrúbka viskóznej subvrstvy je teda úmerná kinematickej viskozite tekutiny a nepriamo úmerná rýchlosti spriemerovaného voľného prúdu. Pri internom prúdení potom vysoká rýchlosť prúdenia splošťuje profil rýchlosti a pri veľmi vysokých Reynoldsových číslach sa profil prúdu blíži profilu rovnomerného prúdenia.

V analýzach medznej vrstvy sa obyčajne používa tzv. *normalizovaná bezrozmerná rýchlosť* u^+ a *normalizovaná bezrozmerná vzdialenosť od steny* y^+

$$u^+ = \frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{\overline{u}}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \qquad\qquad y^+ = \frac{u_\tau}{\upsilon}y = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\upsilon}y \tag{16}$$

Potom rovnicu (14), ktorá je vyjadrením tzv. *zákona steny* možno pre viskóznu subvrstvu zapísať jednoducho

$$u^+ = y^+ \qquad\qquad 0 \le y^+ \le 5 \tag{17}$$

Vo *vonkajšej vrstve* (obr. 7) je rýchlostný profil nezávislý od viskozity, ale závisí hrúbky mednej vrstvy a prípadne i iných parametrov voľného prúdu. Na základe rozmerovej analýzy tu platí funkčný vzťah

$$\frac{\overline{u}_0-\overline{u}}{u_\tau}=f\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{18}$$

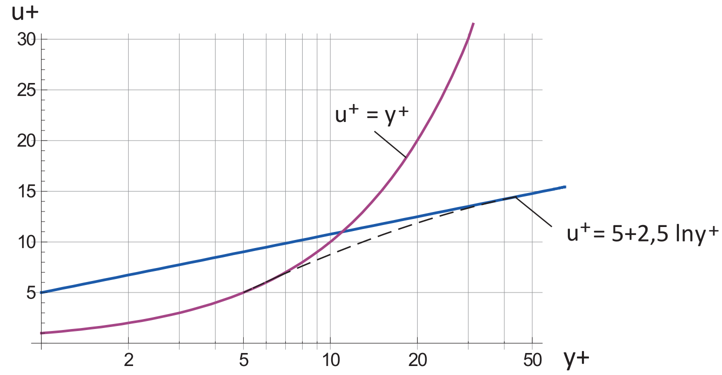
Dá sa ukázať, že pri požiadavke hladkej náväznosti rýchlostného profilu vonkajšej a viskóznej mednej vrstvy musí vo vrstve s plne rozvinutou turbulenciou platiť vzťah

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau}=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{u_\tau y}{\upsilon}+C \tag{19}$$

tzv. *logaritmický* zákon steny. Aproximačné hodnoty konštánt v tomto vzťahu pre *hladkú* stenu sú $\kappa=0{,}4$ a $C\approx 5{,}0$. Takže v stručnom zápise s normalizovanými hodnotami pre túto oblasť turbulentnej mednej vrstvy dostávame

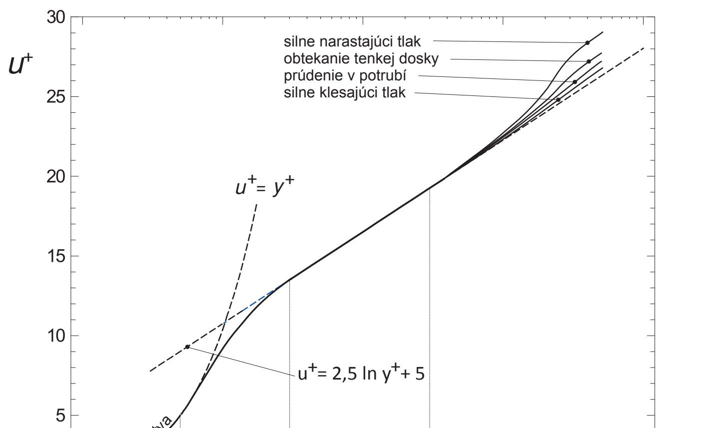
$$u^+=2{,}5\ln y^+ +5 \qquad\qquad \sim 30\le y^+\le\sim 300 \tag{20}$$

V súradnicovom systéme ($\ln y^+$, u^+) je to priamka a vzťah (17) pre viskóznu subvrstvu sa potom zmení na krivku (obr.9). Prepojenie medzi obidvomi čiarami podľa výsledkov experimentov tvorí čiarkovaná krivka udávajúca začiatok vrstvy s plne rozvinutou turbulenciou (alebo regiónu logaritmického zákona) s hodnotou y^+ = 30 až 60. Koniec platnosti logaritmického zákona je podľa experimentálnych meraní pri hodnote y^+ = 300 až 600 (obr.10).



Obr. 9 *Nadväznosť čiar viskóznej subvrstvy* (17) *a vrstvy s logaritmickým vzťahom* (20) *cez prechodovú vrstvu*

Za hranicou platnosti logaritmického profilu normalizovanej rýchlosti sa dostávame do oblasti vonkajšej vrstvy a voľného prúdu, kde jeho tvar závisí od podmienok v tejto oblasti (obr.10).



Obr. 10 *Experimentálno-analytická charakteristika mednej vrstvy turbulentného prúdenia*

Využitie uvedených normalizovaných charakteristík turbulentnej mednej vrstvy na správnu voľbu hustoty siete v blízkosti steny závisí od použitého modelu turbulentného prúdenia a postupov, ktoré sa v danom programe využívajú na optimálne vystihnutie pomerov v tejto oblasti.

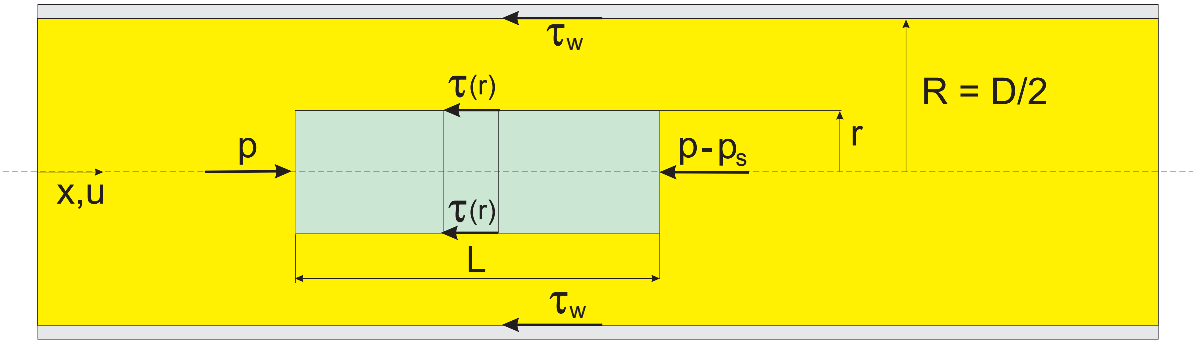
Vplyv drsnosti steny

Problematiku vplyvu drsnosti steny možno stručne ozrejmiť na príklade ustáleného plne rozvinutého *turbulentného* prúdenia tekutiny s konštantnou hustotou ρ a viskozitou μ vo vodorovnom *kruhovom potrubí* so zanedbaním tiažových síl (obr.11). V potrubí na určitej dĺžke L v smere prúdenia dochádza k poklesu tlaku (tlakovej strate) $p_s > 0$ účinkom šmykového napätia $\tau(r)$ tekutiny a za určitých okolností aj účinkom drsnosti steny. Zaujíma nás, kedy a ako drsnosť steny potrubia ovplyvňuje veľkosť tlakovej straty.

Úvodom treba povedať, že pri turbulentnom prúdení nepoznáme analytický vzťah pre šmykové napätie (10) a preto sa tlaková strata určuje za pomoci experimentálne určeného bezrozmerného (Fanningovho) koeficientu trenia vyjadrujúceho pomer stenového šmykového napätia τ_w a dynamického tlaku *strednej hodnoty spriemerovanej rýchlosti* prúdenia tekutiny (jednoducho označenej ako u)

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} \tag{21}$$

Rýchlosť u možno určiť meraním prietočného množstva tekutiny a stenové napätie možno vyjadriť tiež pomocou merateľných veličín. Pre silové pomery na vyznačenom objeme tekutiny totiž vzhľadom na ustálené prúdenie (nulové dynamické sily) platí



Obr.11 *Tlakový pokles (tlaková strata) v kruhovom potrubí na dĺžke L* ($p_s > 0$)

$$p\pi r^2 - (p - p_s)\pi r^2 - 2\pi r L\tau = 0$$

Z toho dostávame lineárny priebeh šmykového napätia po priereze

$$\tau = \frac{p_s}{2\mathrm{L}} r \tag{22}$$

s maximálnou hodnotou na stene potrubia

$$\tau_{\max} = \tau_w = \frac{p_s}{2\mathrm{L}}\mathrm{R} = \frac{p_s \mathrm{D}}{4\mathrm{L}} \tag{23}$$

Z tejto rovnice a definície (21) dostávame vzťah pre výpočet tlakovej straty na dĺžke ΔL

$$p_s = 4c_f \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}\left(\tfrac{1}{2}\rho u^2\right) = f\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}\left(\tfrac{1}{2}\rho u^2\right) \tag{24}$$

Násobok $f = 4c_f$ sa nazýva Darcyho koeficient trenia.

Koeficienty trenia závisia od Reynoldsovho čísla a relatívnej drsnosti steny ε / D (ε je priemerná výška drsnosti) a získali sa prácnymi experimentálnymi meraniami na rúrach s umelo vytvorenou drsnosťou. Sú spracované do tabuliek, grafov alebo sa určujú z funkcionálnych vzťahov založených na nameraných hodnotách.

Populárna je Colebrookova rovnica

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/\mathrm{D}}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad \mathrm{Re} > 4000 \tag{25}$$

pretože jej (na vyčíslenie f nie práve najvhodnejší) tvar je graficky spracovaný do Moodyho diagramu (obr.12), z ktorého možno f odčítať pre zadanú relatívnej drsnosť a Reynoldsovo číslo. Pre priemyselné rúry, ktorých drsnosť má obyčajne iný charakter ako umelo vytvorená drsnosť, sú k dispozícii ekvivalentné drsnosti vyhovujúce pre uvedené definície koeficientov. Koeficient f sa jednoduchšie vyčísľuje z Haalandovho aproximačného vzťahu

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1{,}8\log_{10}\left[\left(\frac{\varepsilon/\mathrm{D}}{3{,}7}\right)^{1{,}11} + \frac{6{,}9}{Re}\right] \qquad \mathrm{Re} > 4000 \tag{26}$$

Rovnica (24) sa využíva aj na určovanie tlakovej straty pri *laminárnom* prúdení. V takomto prípade koeficient f závisí len od Reynoldsovho čísla a platí lineárny vzťah

$$f = \frac{64}{Re} \tag{27}$$

Dá sa to ľahko dokázať, pretože v tomto prípade rovnica (10) sa zmení na klasický Newtonov zákon viskozity

$$\tau = \mu\frac{du}{dr} \tag{28}$$

a strednú hodnotu rýchlosti možno určiť analyticky. Podľa rovníc (22) a (28) pre gradient rýchlosti v radiálnom smere platí

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{p_s}{\mathrm{L}}r \tag{29}$$

Integráciou tohto vzťahu podľa r s uplatnením okrajovej podmienky $r = R \rightarrow u = 0$, dostaneme vzťah pre rýchlostný profil po priereze potrubia

$$u(r) = \frac{p_s}{4\mu\mathrm{L}}\left(\mathrm{R}^2 - r^2\right) = \frac{p_s}{16\mu\mathrm{L}}\left(\mathrm{D}^2 - d^2\right) \tag{30}$$

so strednou hodnotou (označenej opäť ako u) rovnou polovici maximálnej rýchlosti

$$u = \frac{p_s\mathrm{D}^2}{32\mu\mathrm{L}} \tag{31}$$

Dosadením tejto hodnoty a stenového napätia (23) do definície Fanningovho koeficientu (21) a po rozdelení u^2 na súčin uu dostávame

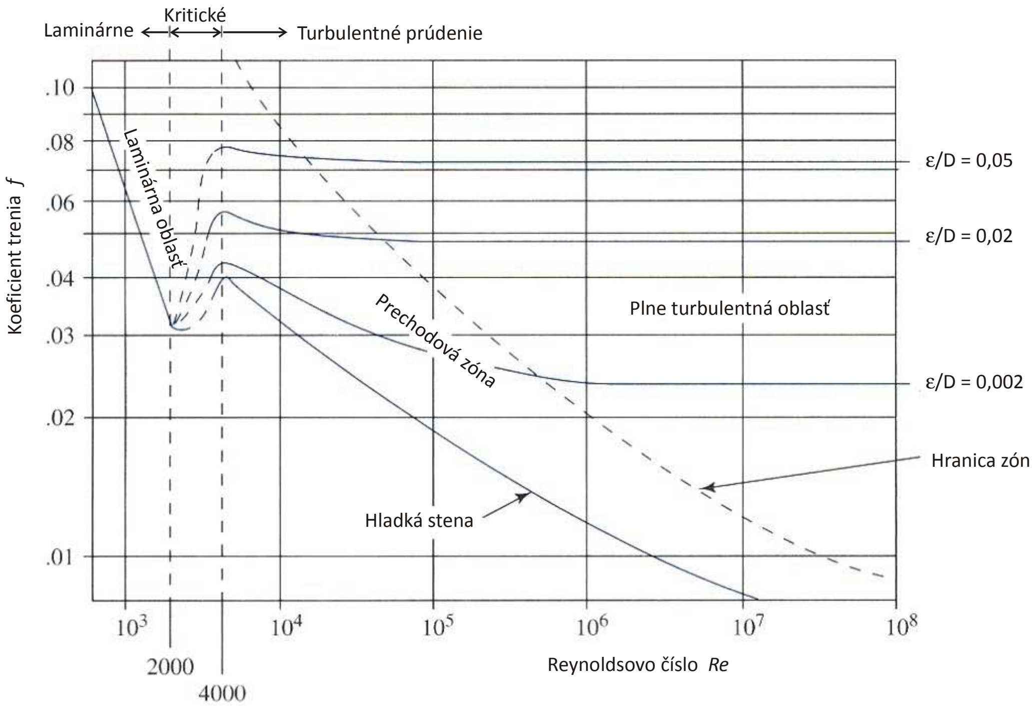
$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \frac{\dfrac{p_s\mathrm{D}}{4\mathrm{L}}}{\frac{1}{2}\rho u\dfrac{p_s\mathrm{D}^2}{32\mu\mathrm{L}}} = \frac{16}{\dfrac{\rho u\mathrm{D}}{\mu}} = \frac{16}{Re} \qquad Re < 2300 \tag{32}$$

Pre Darcyho koeficient potom platí

$$f = 4c_f = \frac{64}{Re} \qquad Re < 2300 \tag{33}$$

Informačný tvar Moodyho diagramu, už aj so zabudovaním vzťahu (33), je uvedený na obr. 12, jeho presnejšie tvary vhodné na odčítanie koeficientov trenia možno nájsť v príručkách alebo na internete.

Ako vidieť v oblasti turbulentného prúdenia najnižšie hodnoty koeficientu trenia má hladká stena; ani v tomto prípade neklesá úplne na nulu vzhľadom na priľnavosť prúdu k stene (nulová rýchlosť pri stene). Kritická prechodová oblasť medzi laminárnym a turbulentným prúdením dáva len orientačné hodnoty koeficienta, pretože prúdenie pri týchto hodnotách *Re* môže byť laminárne alebo turbulentné, prípade účinkom malých porúch v prúdení oscilovať medzi týmito dvomi stavmi, a tak sa súbežne môže meniť aj koeficient trenia. Za prechodovou zónou turbulentného prúdenia, ako vidieť, koeficient trenia pri danej drsnosti už nezávisí od Reynoldsovho čísla. Pretože označovanie koeficientov trenia nie je ustálené, treba pri diagramoch a tabuľkách dávať pozor na to, aby nedošlo k zámene Fanningovho a Darcyho koeficienta. Kontrola v diagramoch, kde je uvedená aj laminárna oblasť, je jednoduchá – pri hodnote $Re = 1000$ v prvom prípade musíme dostať 0,016 a v druhom 0,064.



Obr.12 *Moodyho diagram (zjednodušená schéma)*

Modelovanie turbulencie v programe Ansys Fluent

V programovom balíku Ansys sa nachádza aj pôvodne samostatný program Fluent so širokými možnosťami numerickej simulácie úloh dynamiky tekutín. Použijeme ho na ilustráciu postupov riešenia príkladov turbulentného prúdenia tekutín s niektorými jeho modelmi turbulencie.

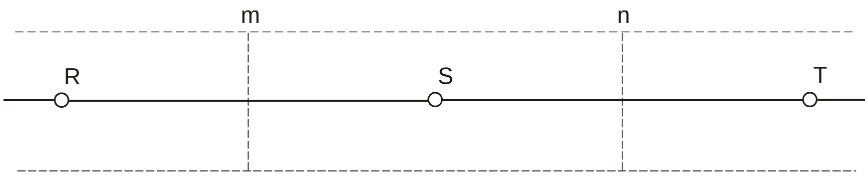
Tak ako všetky programy CFD aj program Ansys Fluent sa skladá z troch základných častí: (1) Z predprocesora využívaného na tvorbu alebo načítanie geometrie, tvorbu výpočtovej siete, definovanie začiatočných a okrajových podmienok a zadanie parametrov tekutiny a prúdenia. (2) Z riešiča, ktorý (u tohto programu metódou konečných objemov) vytvorí a iteračným spôsobom vyrieši výslednú nelineárnu sústavu rovníc úlohy a (3) z postprocesora, ktorý slúži na numerické spracovanie a grafickú vizualizáciu výsledkov.

V oblasti, ktorá nás v tejto časti zaujíma, ponúka program tieto možnosti simulácie prúdenia:

- Dvojrozmerné rovinné, osovo, resp. rotačne symetrické a trojrozmerné
- Ustálené a nestacionárne
- Nestlačiteľné alebo stlačiteľné vo všetkých rýchlostných režimoch (pomalé subsonické, transonické, supersonické a hypersonické)
- Neviskózne, laminárne, turbulentné
- Newtonovské, nenewtonovské

Metódu konečných objemov (MKO), ktorú Fluent využíva na riešenie sústavy diferenciálnych rovníc prúdenia, možno charakterizovať aj ako špeciálny (zjednodušený) prípad MKP, kedy interpolačná (aproximačná, tvarová) funkcia je na celej oblasti prvku (budeme ho nazývať bunka) rovná jednej a hodnoty premenných sa potom v oblasti bunky nemenia. Pripomíname, že v MKP má interpolačná funkcia prvku jednotkovú hodnotu len v uzlových bodoch a po prvku sa, tak, ako aj primárna neznáma, lineárne, kvadraticky a pod. mení podľa kvality prvku.

Bunka v MKO obsahuje len jeden uzol (zároveň aj integračný bod) S umiestnený v geometrickom ťažisku bunky (obr.13). Diskretizáciu parciálnej diferenciálnej rovnice potom možno vykonať jednoduchšie (ale menej



Obr.13 *Jednorozmerný konečný objem s uzlom S*

presne) ako v MKP. Napr. pre jednorozmernú úlohu sa prvá derivácia premennej u na hraniciach m a n bunky jednoducho vyjadrí ako rozdiel hodnôt premennej v susedných uzloch vydelený ich vzdialenosťou

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_m = \frac{u_S - u_R}{x_S - x_R}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_n = \frac{u_T - u_S}{x_T - x_S}$$

Druhá derivácia tejto premennej v uzle S sa potom aproximuje ako rozdiel týchto hodnôt podelený dĺžkou bunky

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_S = \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_n - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_m}{x_n - x_m}$$

Druhou, menej príjemnou stránkou takejto jednoduchej diskretizácie je, samozrejme, nutnosť modelovania veľmi hustej siete buniek v oblastiach vysokých gradientov premenných, aby sa zaručila dostatočná presnosť výsledkov.

Ansys Fluent poskytuje užívateľovi pomerne široký výber modelov turbulentného prúdenia, ktorých väčšina je typu RANS založená na Boussinesquovej hypotéze. Spomeňme aspoň jednorovnicový Spalart-Allmarasov model a populárne dvojrovnicové k-ε a k-ω modely, kde

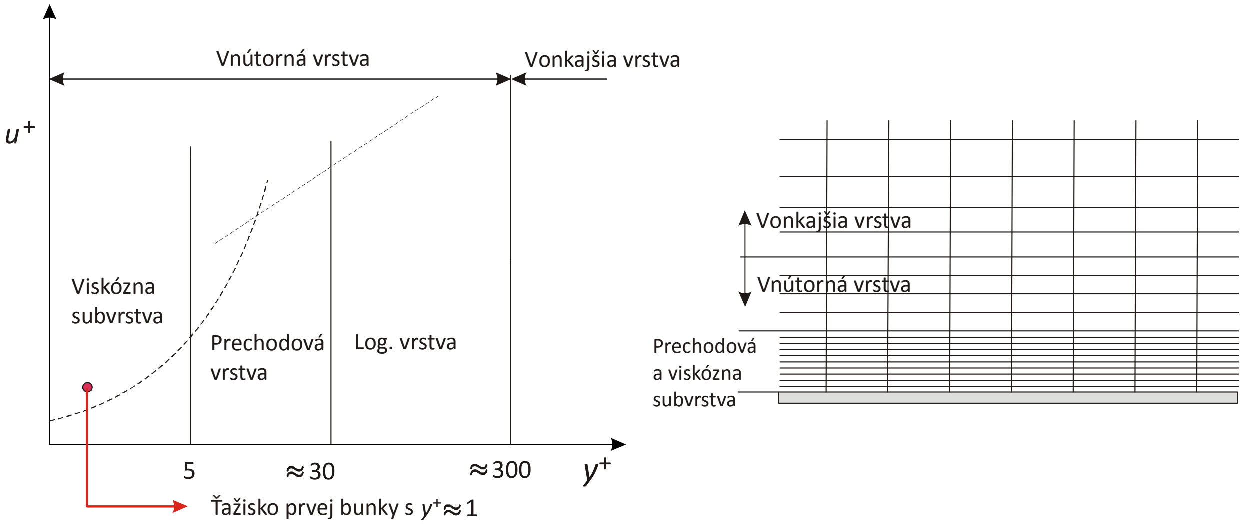
$$k = \tfrac{1}{2}(\overline{u}'^2 + \overline{v}'^2 + \overline{w}'^2) \tag{34}$$

je merná (vztiahnutá na jednotku hmotnosti) spriemerovaná kinetická energia, ε je rýchlosť jej disipácie a $\omega \approx \varepsilon/k$.

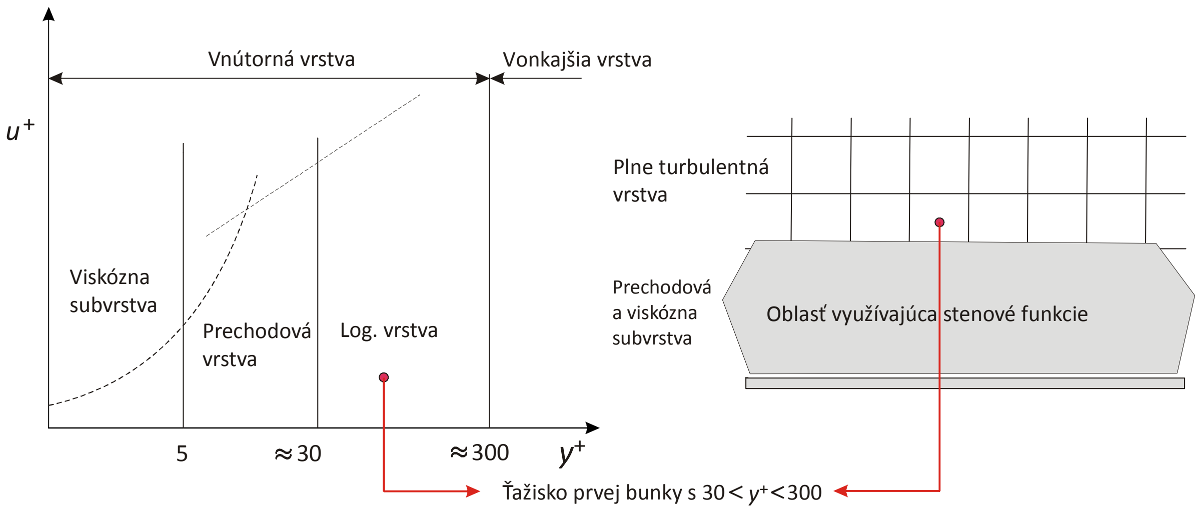
Z tejto skupiny sa čiastočne vyčleňuje model RSM (Reynolds Stress Model), pri ktorom sa za účelom spresnenia riešenia vypúšta Boussinesquovej hypotéza a modelujú sa všetky zložky Reynoldsovho napätia a tiež rýchlosť disipácie. K spriemerovaným N-S rovniciam je pri tomto modeli potom potrebne zostavovať a riešiť päť ďalších rovníc pre 2D prúdenie, resp. sedem ďalších rovníc pre 3D prúdenie. Ďalšou skupinou sú LES (*Large Eddy Simulation*) modely s výrazne vyššími nárokmi na hardvérový výkon a spotrebu strojového času najmä pri vyšších Reynoldsových číslach a komplexnom geometrickom tvare vyšetrovanej oblasti.

Prúdenie v blízkosti steny sa modeluje dvomi spôsobmi. Prvý spôsob spočíva vo vytvorení veľmi hustej siete buniek v oblasti blízko steny, najmä v oblasti viskóznej a prechodovej medznej vrstvy (obr. 14), pretože v takomto prípade sa pracuje s modelom, ktorý aj túto oblasť s vysokými gradientami neznámych rieši numerickou integráciou rovníc výpočtového modelu. Ako sme vyššie naznačili MKO v takomto prípade vyžaduje v okolí steny veľmi hustú sieť s hodnotou $y^+ \approx 1$ pre normalizovanú vzdialenosť ťažiska najbližšej bunky od steny, čo pri úlohách s vysokými hodnotami *Re* vedie (viskózna medzná vrstva v takýchto prípadoch môže mať hodnoty menšie ako 1 mm - nemýliť si to s y^+) na numericky ťažko zvládnuteľný veľký systém rovníc. Často sa takéto modelovanie okolia steny nazýva aj modelovanie pre nízku (turbulentnú) hodnotu Reynoldsovho čísla (*Low-Reynolds-Number Turbulent Modeling*). Využíva sa v prípadoch, kedy to pomerne nízka (turbulentná) hodnota *Re* (myslí sa tým *Re* vo vnútornej medznej vrstve, nie globálna hodnota *Re*) dovoľuje, alebo vtedy, keď je to nevyhnutné (separácia prúdu, laminárno-turbulentný prechod, prenos tepla a i.).

Druhý spôsob sa využíva v prípadoch, kedy hustota siete potrebná na dostatočne presné numerické riešenie oblastí v okolí steny by viedla na neprijateľne vysoký počet rovníc diskrétneho modelu úlohy. V takom prípade sa hľadané premenné v okolí steny určujú pomocou empiricko-analytických funkcií s názvom *stenové funkcie*. Program zabezpečí prepojenie takto získaných hodnôt v oblasti medznej vrstvy s hodnotami v susediacich diskrétnych bodoch výpočtovej siete v miestach ďalej od steny, kde už môže byť sieť buniek podstatne redšia (obr. 15).



Obr. 14 *Princíp modelovania v blízkosti steny pre nízku (turbulentnú) hodnotu Reynoldsovho čísla (Low-Reynolds-Number Turbulent Modeling)*



Obr. 14 *Princíp modelovania v blízkosti steny s využitím stenových funkcií*

Turbulentný model môže byť určený pre prvý alebo druhý spôsob riešenia úlohy v blízkosti steny, alebo môže byť upravený tak, že podľa zadanej kvality siete volí niektorú z týchto možností. V tejto súvislosti treba povedať, že na vývoji postupov čo najmenej citlivých na y^+ hodnoty v blízkosti stien geometricky komplikovaných oblastí sa permanentne pracuje a užívateľské možnosti sa líšia podľa aktuálnosti používanej verzie programu.

Všeobecná forma rovníc turbulentného modelu je analogická s prenosovými (transportnými) rovnicami chemicky reagujúcich zložiek prenášaných prúdom tekutiny

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \overline{v}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = a \frac{\partial}{\partial x_j}\left[d \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] + P(\phi) - D(\phi) \tag{35}$$

kde ϕ je zovšeobecnená turbulentná premenná, d je difuzivita, $\overline{v}_i$ sú zložky spriemerovanej rýchlosti a a je konštanta. Členy na ľavej strane rovnice reprezentujú konvektívny transport ϕ a prvý člen na pravej strane jej difúziu. Funkcie $P(\phi)$ a $D(\phi)$ simulujú produkciu a deštrukciu ϕ.

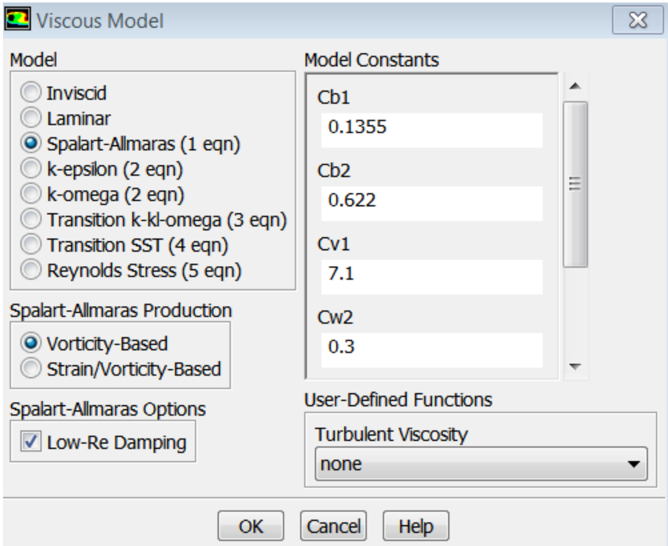
Spalart-Allmarasov model

Spalart-Allmarasov model je jednorovnicový RANS model využívajúci Boussinesqovu hypotézu (7) na určenie Reynoldsových napätí, v ktorej sa ignoruje člen s turbulentnou kinetickou energiou k a turbulentná kinematická viskozita $\tilde{\upsilon} = \mu_t / \rho$ sa modeluje rovnicou (použijeme označenia podľa teoretického manuálu programu Ansys)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\upsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{\upsilon}v_i) = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\upsilon}}}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\mu + \rho\tilde{\upsilon})\frac{\partial\tilde{\upsilon}}{\partial x_j}\right\} + C_{b2}\rho\left(\frac{\partial\tilde{\upsilon}}{\partial x_j}\right)^2\right] + G_\upsilon - Y_\upsilon + S_{\tilde{\upsilon}} \tag{36}$$

kde $\sigma_{\tilde{\upsilon}}$, C_{b2} sú konštanty, funkcia G_υ modeluje produkciu turbulentnej viskozity $\tilde{\upsilon}$ a Y_υ jej deštrukciu potrebnú na simuláciu jej tlmenia v blízkosti steny. $S_{\tilde{\upsilon}}$ je funkcia zdroja turbulentnej viskozity, ktorý v prípade potreby môže zadať užívateľ programu. Podrobný rozpis týchto funkcií a hodnoty ďalších konštát určených empirickou kalibráciou modelu možno nájsť v manuáli.

Vo východzom nastavení modelu na obr. 15 je produkcia turbulentnej viskozity (Spalart-Allmaras *Production*) určovaná tenzorom rýchlosti rotácie, t.j. vírivosťou (*Vorticity-Based*), pri druhej možnosti (*Strain/Vorticity-Based*) kombináciou rýchlosti deformácie a rýchlosti rotácie. Zapnuté je tlmenie turbulencie v oblastiach s nízkou *lokálnou* hodnotou Reynoldsovho čísla (*Low-Re Damping)* a užívateľ nebude zadávať funkciu pre ním definovaný zdroj turbulencie (*User-Defined Functions*).



Obr. 15 *Okno programu Ansys Fluent s východzími charakteristikami Spalart-Allmarasovho modelu*

Spalart-Allmarasov model predpokladá riešenie viskóznej medznej vrstvy priamou integráciou, t.j. vyžaduje sa vysoká hustota siete v blízkosti steny ($y^+ \approx 1$) i keď program Ansys zabezpečuje, že model nezlyhá ani v prípade redšieho delenia, pokiaľ sa dodržia zásady tvorby výpočtovej siete pre využitie stenových funkcií s $y^+ \geq 30$. Bol vytvorený pre ekonomické riešenie úloh kozmického výskumu, nehodí sa pre úlohy s výraznejšou separáciou prúdu a pre presnejšie riešenie bežných priemyselných úloh turbulentného prúdenia je použite viacrovnicových modelov spoľahlivejšie.

Štandardný k-ε model a jeho modifikácie

Štandardný *k*-ε model je poloempirický dvojrovnicový model založený na modelových rovniciach prenosu turbulentnej kinetickej energie *k* (na jednotku hmotnosti) a jej rýchlosti disipácie ε.

Jeho prvý návrh je z roku 1972 a odvtedy prešiel mnohými vylepšeniami, nehovoriac o vzniku jeho modifikácií (*k*-ε RNG, *k*-ε realizable), ktoré odstránili jeho systémové nedostatky pri riešení niektorých špecifických úloh. To vysvetľuje kvalitu, široké využitie a popularitu týchto modelov.

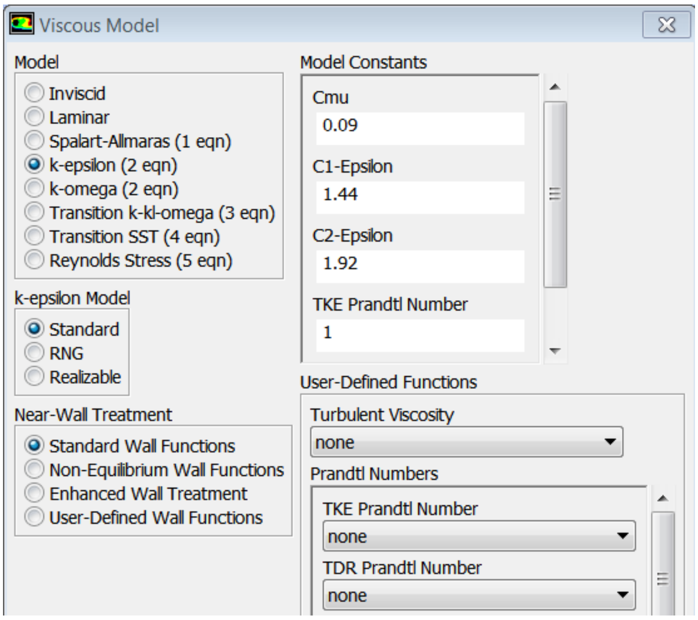
Pri odvádzaní rovníc modelu sa zavádza predpoklad, že prúdenie je plne turbulentné so zanedbateľným vplyvom molekulárnej viskozity. Štandardný *k*-ε model je preto určený len na riešenie plne turbulentného prúdenia.

Základom modelu sú dve diferenciálne rovnice aproximujúce (modelujúce) transport k a ε (pozri teoretický manuál programu Ansys), ktorých riešenie umožňuje určovať turbulentnú (vírovú) viskozitu μ_t ako určitú kombináciu týchto veličín zo vzťahu

$$\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon \tag{37}$$

kde C_μ je konštanta (pre tento model C_μ = 0,09). Pri známej hodnote μ_t možno už potom určovať Reynodsove napätia pomocou Boussinesqovej hypotézy (7) a model je takto kompletný.

Model obsahuje viacero empirických konštánt určených experimentami so vzduchom a vodou tak, aby boli optimálne pre čo najširšiu škálu interného a voľného prúdenia tekutín. V zadávacej tabuľke modelu možno niektoré meniť, čo sa však neodporúča pri nedostatku skúseností s týmto modelom a s určitou tiedou častejšie riešených úloh



Na druhej strane je užitočné niečo vedieť o voľbe stenových funkcií v okne *Near-Wall Treatment.* Ako sme už uviesli štandardný k-ε model (ale i jeho modifikácie a tiež RSM a LES model), na rozdiel od Spalart-Allmarasovho modelu a $k-\omega$ modelov, je vytvorený na riešenie plne turbulentného prúdenia. Stenové funkcie preto slúžia na to, aby tento model (ale i ďalšie tohto typu) zvládol aj prúdenie okolo steny, kde sa objavuje aj laminárne a zmiešané prúdenie.

Program implicitne ponúka štandardné stenové funkcie (*Standard Wall Functions*). Pri tejto voľbe normalizovaná vzdialenosť každej bunky susediacej so stenou by mala spĺňať podmienku $30 < y^+ < 300$, optimálne by mala byť čo najbližšie k hodnote 30. (Táto požiadavka platí aj pre voľbu nerovnovážnych stenových funkcií – *Non-Equilibrium Wall Functions.*) V týchto prípadoch sa oblasť okolia steny teda rieši klasicky pomocou stenových funkcií (obr. 14).

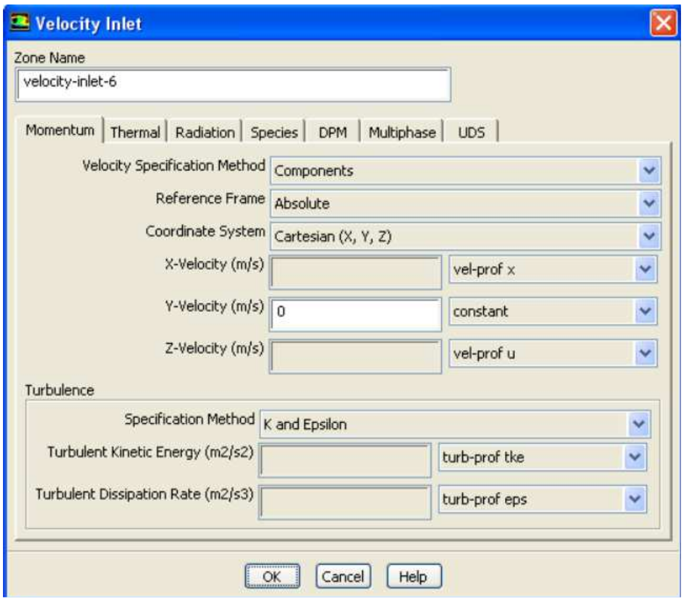
Štandardné stenové funkcie pracujú dobre pre širokú oblasť prúdení obmedzených stenou, pravda, nie sú spoľahlivé v špeciálnych prípadoch prúdenia, najmä tých, kde sa v blízkosti steny vykytujú silné tlakové gradienty porušujúce rýchlostný profil, pri separácii prúdu a jeho opätovnom spájaní a pri všetkých geometrických alebo iných zásahoch do prúdu vyvolávajúcich jeho náhlu zmenu spojenú s náhlymi zmenami tlaku. V takýchto prípadoch môže zlepšenie výsledku v okolí steny najmä šmykového stenového napätia (koeficient trenia) a prenosu tepla (Nusseltovo a Stantonovo číslo) priniesť voľba nerovnovážnych funkcií.

Voľba vylepšeného riešenia okolia steny (*Enhanced Wall Treatment*) je určená na zlepšenie priameho integrálneho riešenia oblasti medznej vrstvy steny (obr. 13) za viskóznou subvrstvou pomocoou špeciálnych stenových funkcií. Táto voľba umožňujú tiež využitie k-ε modelov aj pri hustom delení medznej vrstvy s podmienou $y^+ \leq 5$.

Určovanie vstupných parametrov turbulentného prúdenia

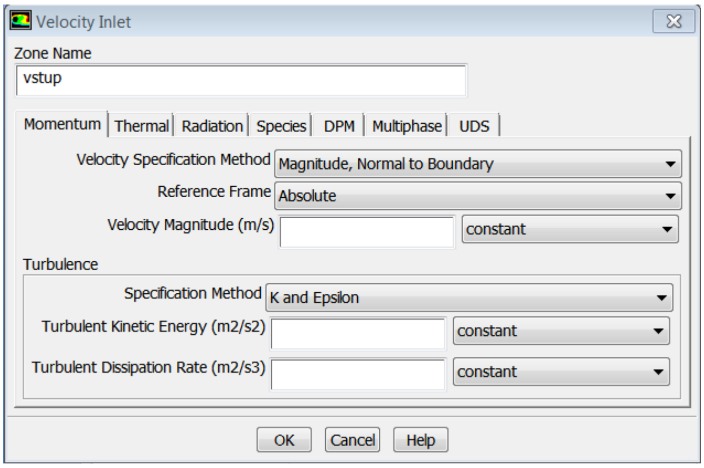
Pri riešení úloh s turbulenciou treba na hraniciach (plochách, čiarach), kde (turbulentný) prúd vstupuje do kontrolného objemu, zadať turbulentné parametre vstupujúceho prúdu. Tieto charakteristiky sa zadávajú vo forme turbulentných okrajových podmienok.

Ideálny je prípad, kedy tieto charakteristiky poznáme z experimentálnych meraní (napr. v aerodynamickom tuneli). Program umožňuje tieto numerické alebo analytické hodnoty načítať a uložiť ako súbory so zvolenými názvami a potom ich načítať ako vstupné hodnoty pre príslušnú vstupnú oblasť. Nasledujúci obrázok ukazuje načítanie takéhoto tzv. *profilu* pre *k*-ε model a vstupnú oblasť s názvom *velocity-inlet-6*



V príslušných kolonkách sú uvedené názvy súborov obsahujúce polohové súradnice a príslušné hodnoty vstupujúcich zložiek rýchlosti (*u* a w, zložka *v* je nulová) a tiež *k* a ε.

Pri mnohých úlohách sa však turbulentné okrajové podmienky zadávajú vo forme odhadnutých konštantných hodnôt. Zadávacia tabuľka pre vstupnú rýchlosť turbulentného prúdu potom vyzerá takto



a treba do nej zadať vstupnú priemernú rýchlosť u_0 a odhadnuté hodnoty k a ε. V riadku *Specification Method* možno pre jednotlivé turbulentné modely zvoliť aj iné (konštantné) charakteristiky vstupného turbulentného prúdu. Napr.:

- Intenzita turbulencie I a turbulentné dĺžkové merítko ℓ
- Intenzita turbulencie I a turbulentný viskózny koeficient μ_t / μ
- Intenzita turbulencie I a hydraulický priemer *D*
- Modifikovaná turbulentná viskozita $\overline{\nu}$

a pri špeciálnych turbulentných modeloch množstvo ďalších.

Manuál programu poskytuje viacero vzťahov pre odhad charakteristík vstupného turbulentného prúdu, z ktorých uvedieme len niektoré, platné pre plne rozvinuté turbulentné prúdenie v potrubí.

Pre intenzitu turbulencie približne platí

$$I = \frac{u'}{u_0} = 0{,}16\left(\mathrm{Re}\right)^{-1/8} \tag{38}$$

Merítko turbulentnej dĺžky pre kruhové potrubie možno odhadnúť ako

$$\ell = 0{,}07D \tag{39}$$

Modifikovaná turbulentná viskozita pre Spalart-Allmarasov model sa potom vypočíta zo vzťahu

$$\overline{\nu} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, u_0\, I\, \ell \tag{40}$$

Príklad

Uvažujte rovné kruhové potrubie s hladkou vnútornou stenou o dĺžke L s priemerom $d = 0{,}2$ m. Do potrubia sa privádza vzduch s priemernou rýchlosťou u_0 = 1 m/s a na jeho konci sa odvádza do okolia s atmosférickým tlakom. Hustota vzduchu je $\rho =$ 1,2 kg/m^3 a dynamická viskozita $\mu = 1{,}79$ 10^{-5} Pa$\cdot$s. Treba určiť rýchlostný profil plne rozvinutého ustáleného prúdenia vzduchu v potrubí a veľkosť trecieho koeficientu pre odhad dĺžkovej tlakovej straty.

<u>Riešenie</u>

Prípravné výpočty

Jedná sa o turbulentné prúdenie pretože Reynoldsovo číslo je

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u_0 d}{\mu} = \frac{1{,}2\cdot 1\cdot 0{,}2}{1{,}79\cdot 10^{-5}} = 13408 > 2300$$

Pri vstupe vzduchu do potrubia začne sa postupne prejavovať vplyv steny vytváraním mednej vrstvy a plne rozvinuté turbulentné prúdenie sa dosiahne len na určitej vzdialenosti od vstupu s názvom vstupná dĺžka L_0. Pre jej približnú hodnotu v prípade turbulentného prúdenia v kruhovom potrubí platí

$$L_0 \approx 4{,}4 d\,\mathrm{Re}^{1/6} = 4{,}4\cdot 0{,}2\cdot 13408^{1/6} = 4{,}29 \text{ m}$$

Na dosiahlo plne rozvinutého prúdenia v riešenom potrubí, by teda mala stačiť táto dĺžka; aby ste však mohli jasne zaznamenať kvalitu ustálenosti rýchlostného profilu pri použitom modeli turbulencie, zvoľte dĺžku $L = 8$ m.

Úloha je pomerne jednoduchá a možno ju riešiť numerickým integrovaním rovníc modelu v celej oblasti vrátane mednej vrstvy (t.j. bez využitia stenových funkcií); potom ale diskretizácia oblasti v blízkosti steny musí byť dostatočne hustá. Pre bezrozmernú vzdialenosť ťažiska bunky susediacej so stenou by podľa (17) malo v takomto prípade platiť

$$y^+ \le 5$$

a pre skutočnú podľa (16) platí

$$y = \frac{\mu}{\rho u_\tau} y^+ = \frac{\mu}{\rho} y^+ \sqrt{\rho / \tau_w}$$

Pre určenie neznámeho stenového šmykového napätia τ_w v tomto vzťahu však treba najprv poznať trecí koeficient f. Vypočíta sa z (26) pre hladkú stenu ($\varepsilon = 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1{,}8\log_{10}\frac{6{,}9}{Re} = -1{,}8\log_{10}\frac{6{,}9}{13408} = 5{,}92 \qquad \rightarrow \qquad f = 0{,}029$$

Stenové šmykové napätie sa teraz už dá určiť z (21)

$$\tau_w = \tfrac{1}{2} c_f \rho u_0^2 = \tfrac{1}{8} f \rho u_0^2 = \tfrac{1}{8} 0{,}029 \cdot 1{,}2 \cdot 1^2 = 0{,}00435 \text{ Pa}$$

Takže pri voľbe $y^+ = 2$ pre vzdialenosť ťažiska bunky y potom platí

$$y = \frac{\mu}{\rho} y^+ \sqrt{\rho / \tau_w} = \frac{1{,}79\ 10^{-5}}{1{,}2} 2\sqrt{1{,}2 / 0{,}00435} = 0{,}00056 \text{ m}$$

Výpočtovú sieť teda treba vytvoriť tak, aby šírka bunky pri stene nebola väčšia ako 1 mm.

K tomuto postupu poznamenávame, že v postprocesore programu možno zobraziť vypočítanú hodnotu y^+, takže problém správnej hustoty siete pri stene možno riešiť (najmä pri malých úlohách) aj tak, že hustotu odhadneme a pokiaľ veľkosť y^+ nevyhovuje, zopakujeme výpočet so zmenenou hustotou.

Intenzita turbulencie na vstupe podľa (38) je

$$I = 0{,}16 \text{Re}^{-1/8} = 0{,}16 \cdot 13408^{-1/8} = 0{,}049$$

a modifikovaná turbulentná viskozita podľa (40) je

$$\overline{\upsilon} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} u_0 I \ell == \sqrt{\tfrac{3}{2}} u_0 \cdot I \cdot 0{,}7d = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot 1 \cdot 0{,}049 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}00084$$

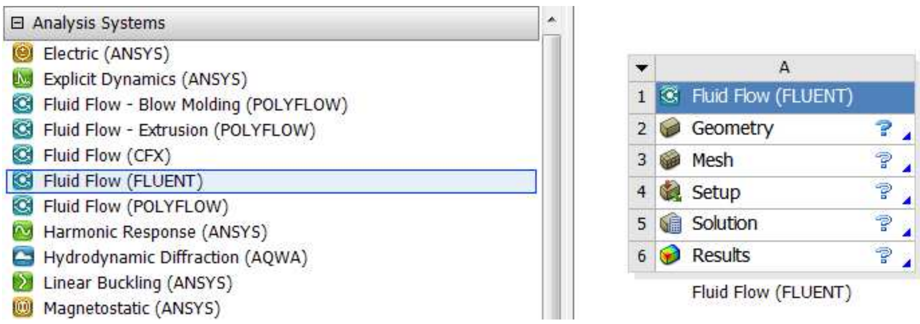
Riešenie úlohy pomocou programu *Ansys Fluent*

Po prípravných výpočtoch opíšeme teraz vlastné riešenie úlohy. Výpočtový model potrubia sa tvorí v predprocesore *Workbench* programu *Ansys Fluent* týmto postupom:

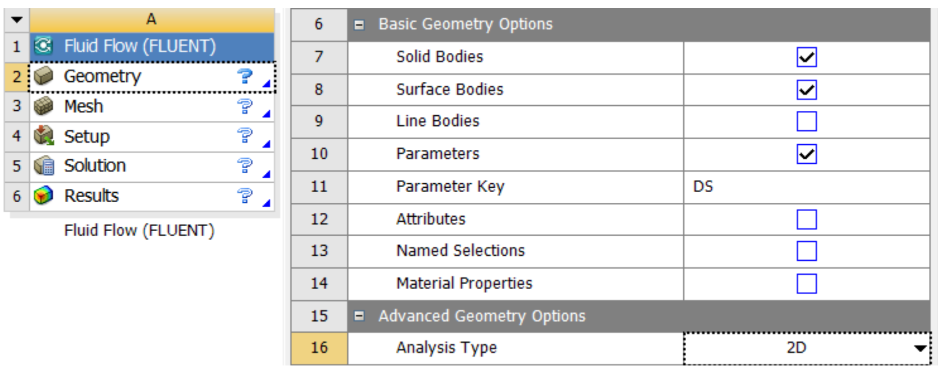
Na disku treba vytvoriť pracovný adresár pre ukladanie súborov úlohy (projektu) napr. s názvom *Fluent PA.*

a) Geometria oblasti

Otvorte *Workbench* a zvolte *Fluid Flow (FLUENT)* dvojitým kliknutím alebo pridržaním ľavým tlačítkom myši a prenesením napravo do naznačeného štvorca). Otvorí sa okno *Project Schematic*

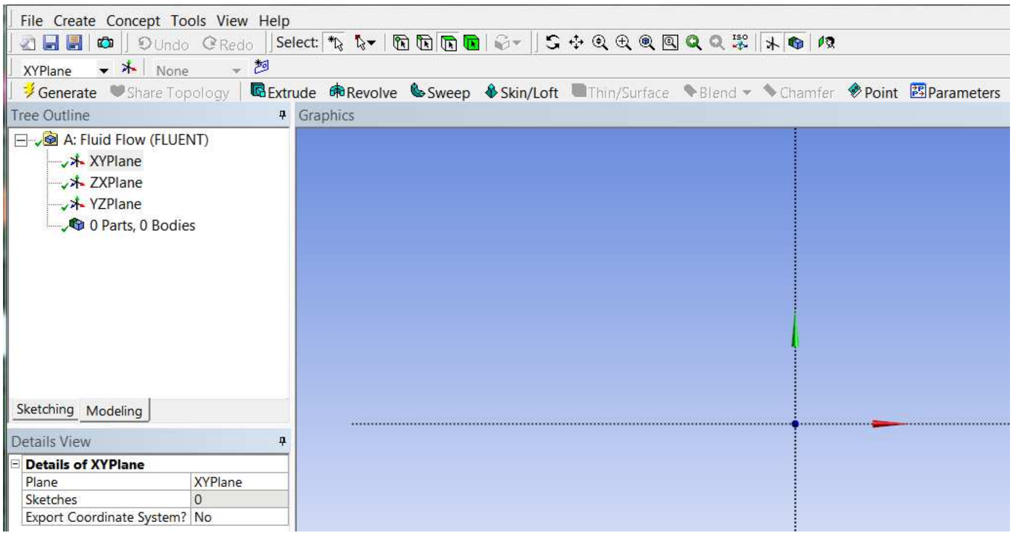


Kliknite *pravým* tlačítkom myši na *Geometry*, zvoľte *Properties*, prepnite typ úlohy na 2D

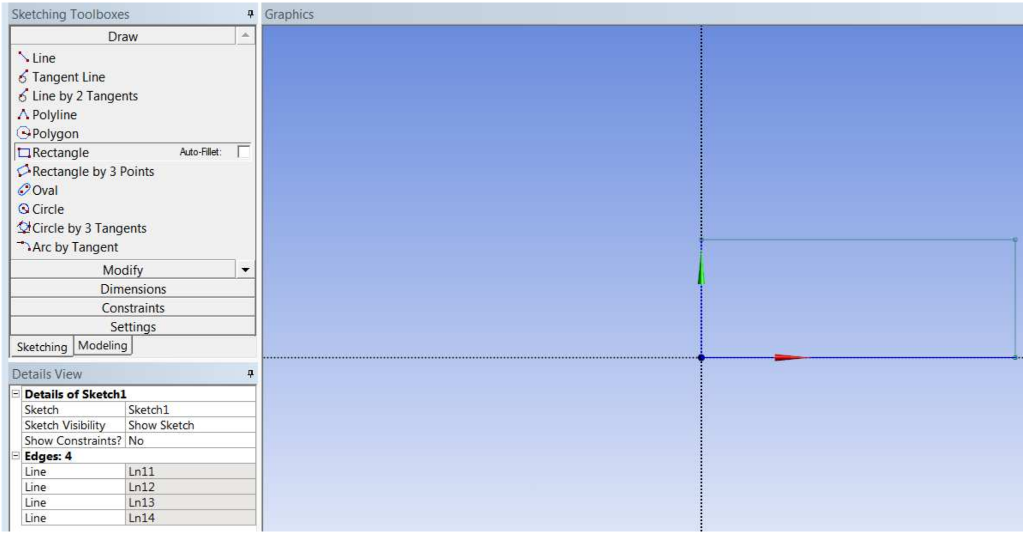


a zatvorte tabuľku.

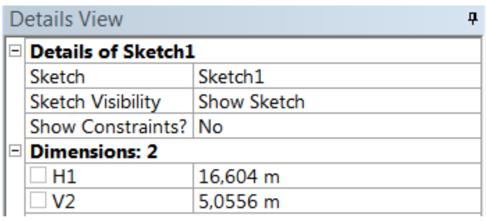
Kliknite dvakrát ľavým tlačítkom myši na *Geometry*, otvorí sa okno *Graphics* pre tvorbu geometrie a potvrďte dĺžkovú jednotku *Meter*. V *Tree Outline* zvolte rovinu *xy* (*XYPlane*) a ďalším kliknutím na os *Z* v symbole súradnicových smerov (v pravom dolnom rohu) zvoľte normálový pohľad na túto rovinu.

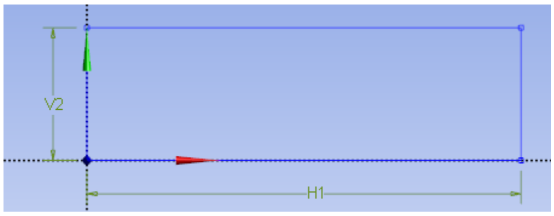


V *Tree Outline* zvoľte *Sketching*, potom *Rectangle.* Kliknite začiatok súradnicového systému a posunutím myši vytiahnite ľubovoľný obdĺžnik

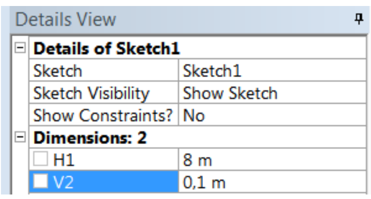


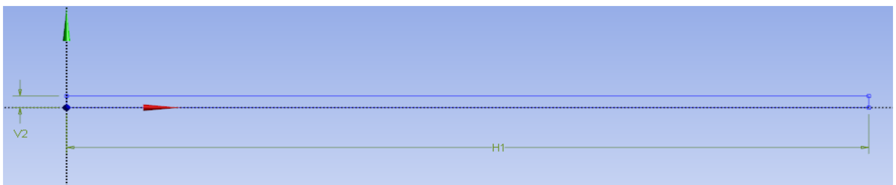
Zvoľte *Dimensions*, kliknutím a potiahnutím dlhej a potom krátkej strany obdĺžnika sa zakótujú strany obdĺžnika s ľubovoľnými rozmermi



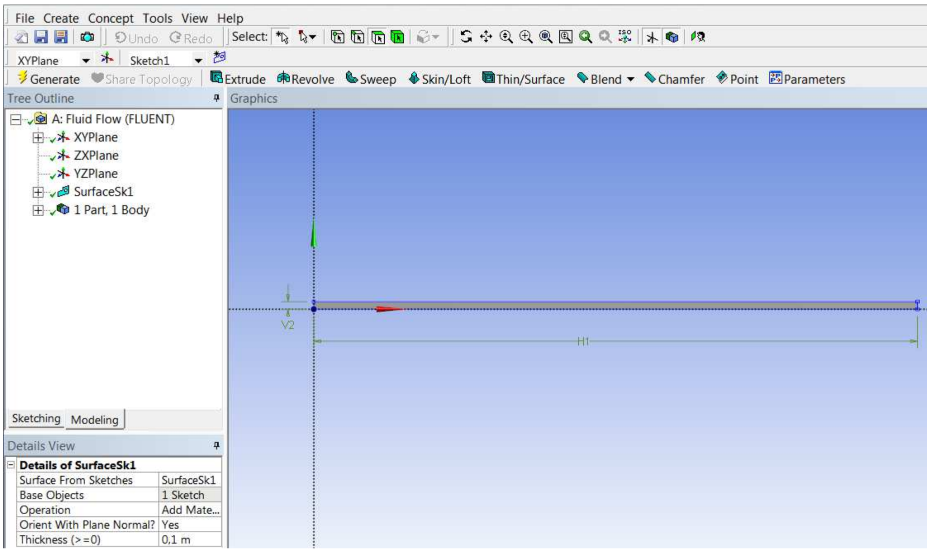


Ľubovoľné rozmery obdĺžnika v *Details View* zmeňte na rozmery polovice priemetu potrubia *H1* = 8 m, *V2* = 0,1 m prepísaním hodnôt v *Details View* a potvrdením *Enter* (podľa nastavenia programu používajte desatinnú čiarku alebo desatinnú bodku). Zväčšite obrázok pomocou .

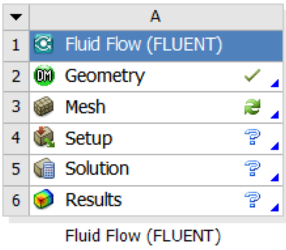




Z čiarového obrázku urobte objekt (oblasť) voľbou *Concept*, *Surfaces from Sketches,* Kliknutím na čiaru obdĺžnika, *Apply* v *Base Objects, Thickness* = 0,1, *Enter*, *Generate*



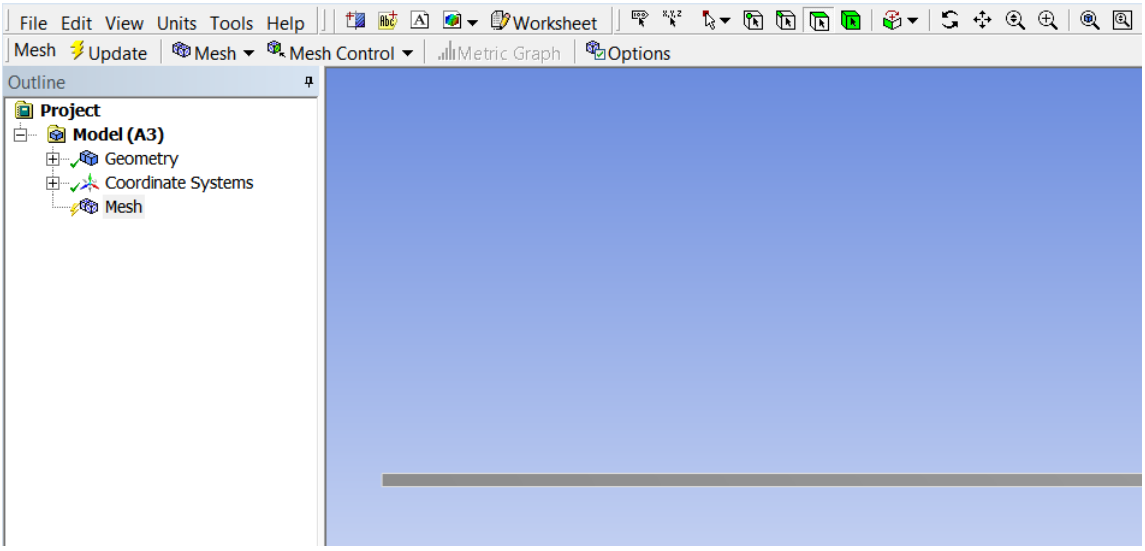
Zavrite okno *Graphics*. Stav riešenia úlohy v *Project Schematic teraz vyzerá takto*



Uložte aktuálny stav riešenia úlohy postupom *File*, *Save As*, otvorením pracovného adresára, nazvaním úlohy *Potrubie* a uložením príkazom *Save*. Vytvorí sa súbor na spúšťanie úlohy *Potrubie.wbpj* a ďalšie s úlohou súvisiace súbory.

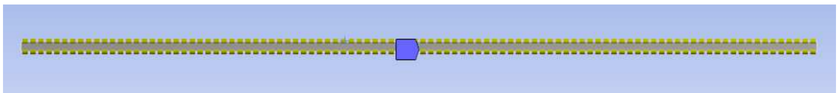
b) **Tvorba siete a klasifikácia jej okrajov**

Dvakrát kliknite na *Mesh* a trpezlivo počkjte kým sa otvorí okno pre tvorbu siete buniek. Zatvorte tabuľku *Meshing Options* a kliknite v *Outline* na Mesh .



Zvoľte *Mesh Control* a otvorte *Sizing*. Teraz treba zadať hustotu delenia na všetkých hranách (čiarach) oblasti. Prepnite filter na ukazovanie čiary a so stlačenou klávesou *Ctrl* kliknutím označte obe dlhšie strany obdĺžnika (musia sa pri tom sfarbiť). V *Details* okne kliknite riadok *Geometry* a povrďte označené hrany s *Apply*. Zmeňte *Behavior* na *Hard* (aby editor presne dodržal počet delení čiar) a *Type* na *Number of Divisions.* Zadajte 100 delení a potvrďte s *Enter.*

Details of "Edge Sizing" - Sizing	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	2 Edges
Definition	
Suppressed	No
Type	Number of Divisions
Number of Divisions	100
Behavior	Hard
Bias Type	No Bias



Pokiaľ by sme aj kratšie strany delili rovnomerne postupovali by sme rovnako. Budeme ich však deliť tak, aby hustota delenia stúpala smerom k stene, a preto bude postup trochu iný. Aby zhusťovanie išlo na oboch stranách v rovnakom smere, musíme každú stranu deliť zvlášť. Zvolíme 40 delení a zhustenie 1:10.

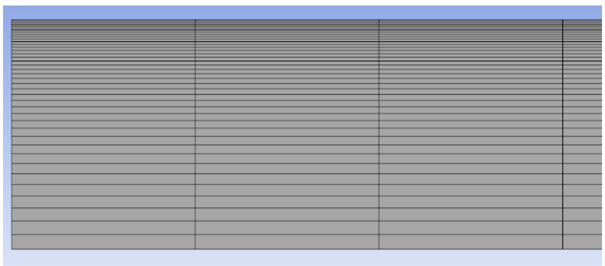
Najprv v *Mesh Control* zvoľte nové delenie *Sizing* a klikneme *pravú* kratšiu stranu obdĺžnika; v *Geometry* ju potvrďte s *Apply*. Detaily delenia zadajte podľa tohto obrázku

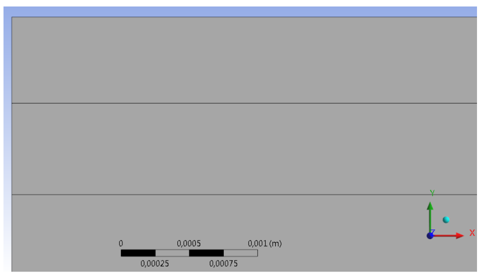
Details of "Edge Sizing 2" - Sizing	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Edge
Definition	
Suppressed	No
Type	Number of Divisions
Number of Divisions	40
Behavior	Hard
Bias Type	____ ___ _ _
Bias Factor	10,

Pre ľavú stranu obdĺžnika je postup rovnaký. Opäť v *Mesh Control* treba zvoliť nové delenie *Sizing* a kliknúť ľavú kratšiu stranu; v *Geometry* ju potvrdiť s *Apply*. Detaily delenia zadajte podľa tohto obrázku

Details of "Edge Sizing 3" - Sizing	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Edge
Definition	
Suppressed	No
Type	Number of Divisions
Number of Divisions	40
Behavior	Hard
Bias Type	_ _ ___ ____
Bias Factor	10,

V *Mesh Control* zvoľte metódu *Maped Face* Meshing, kliknite na obraz potrubia (plocha sa vysvieti) a v *Details of Sizig* po kliknutí v riadku *Geometry* potvrďte vybranú oblasť s *Apply*. Tým je delenie oblasti kompletne pripravené a treba už len zadať príkaz na vytvorenie siete. Otvorte v príkazovom riadku Mesh a zvoľte *Generate Mesh*. Po prebehnutí editácie zviditeľníte sieť kliknutím Mesh v *Outline* okne. Na jej zväčšenie použite *Zoom* . Pri postupnom zväčšovaní siete a porovnaní s dĺžkovým merítkom je vidieť, že šírka bunky pri stene je menšia ako 1 mm.



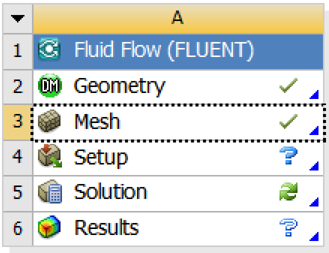


Ak sa pri tvorbe siete niektorý krok nevydaril, alebo nie ste spokojní s delením, možno každý *Sizing*, prípadne i *Mesh*, kliknúť pravým tlačítkom myši a po vymazaní vytvoriť znovu. Môžte tiež načítať uloženú geometriu a zopakovať celý postup tvorby siete.

Po vytvorení siete sa v okne *Meshing* robí aj klasifikácia všetkých okrajových čiar (pri 2D úlohe), resp. plôch (pri 3D úlohe), ako príprava pre zadávanie okrajových podmienok vo *Fluente*. Riešime rotačne symetrickú úlohu, ktorá vznikne rotáciou vytvorených čiar a buniek okolo osi rotácie a na obdĺžniku teda treba označiť os rotácie, ďalej čiaru, z ktorej vznikne valcová stena a čiary, z ktorých sa vytvorí kruhová plocha vstupu a výstupu prúdiaceho vzduchu. Horná čiara obdĺžnika, pri ktorej je husté delenie, bude stena, dolná – je os rotácie, ľavá strana bude vstup a pravá výstup.

Kliknite ľavým a potom pravým tlačítkom myši ľavú stranu obdĺžnika (ukazovací filter musí byť nastavený na čiary) a v tabuľke otvorte *Create Named Selection*, názov prepíšte na *vstup* a potvrďte s OK. Rovnakým postupom nazvite pravú stranu *vystup*, hornú stranu *stena* a dolnú *os*.

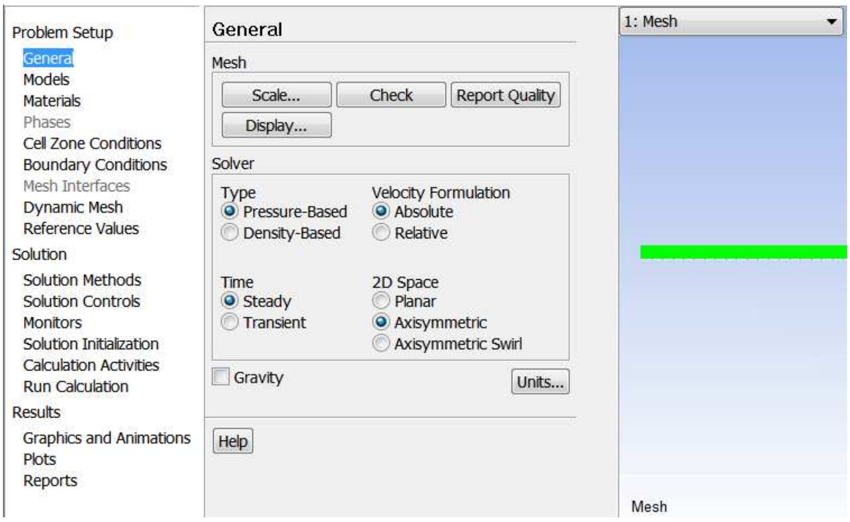
Zatvorte *Meshing* Okno a v skupine príkazov *Workbench* kliknite príkaz Update Project , čím pripravíte úlohu pre program *Fluent*. Uložte úlohu príkazom *Save.* Stav riešenia by mal teraz vyzerať takto



Fluid Flow (FLUENT)

c) Zadanie úlohy vo Fluente

Otvorte *Fluent* dvojitým kliknutím na *Setup* a úvodné okno po zvolení dvojitej presnosti čísiel (*Double Precision*) zatvorte s OK. Otvorí sa pracovné okno programu, kde v časti *2D Space* zvoľte *Axisymetric*



V okne *General* môžte spustiť kontrolu siete (*Check*); vo výpise zoznamu kontrol by sa nemali nemali obiaviť žiadne závady. Je užitočné urobiť tiež kontrolu označenia okrajov oblasti pomocou *Display*. Mali by sa tam objaviť názvy okrajových čiar *vstup*, *vystup*, *os rotacie* a *stena*.

Vo voľbách *Models* treba vysvietiť *Viscouos-Laminar* a pomocou *Edit* zvoliť turbulentný Spalart-Allmarasov model. Objaví sa okno pre zadanie jeho parametrov, ktoré sme stručne opísali vyššie pri informácii o tomto modeli; zavrite ho bez akejkoľvek zmeny.

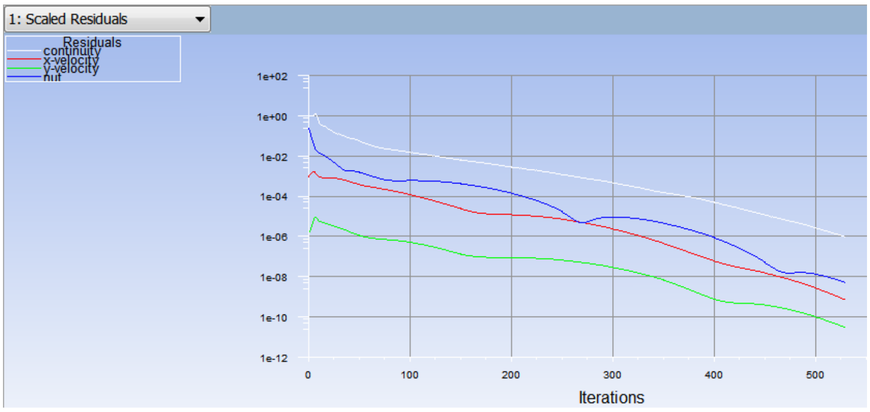
Ďalej zvoľte zadanie vlastností tekutiny (*Materials*), kde vysvieťte *air* a zvoľte *Create/Edit*. Zmeňte hustotu na 1.2 a viskozitu na $\mu = 1.79$ e^{-5}, potvrďte zmeny s *Change/Create* a zavrite okno. (Vo Fluente pravdepodobne budete musieť používať desatinnú bodku; treba si zadanie overiť opätovním otvorením.)ý

V okne *Boundary Conditions* zvoľte *os,* jej *Type* zmeňte na *axis* a cez *Edit* potvrďte. Analogicky označte *stenu* ako *wall* a *vystup* ako *pressure-outlet* s *Gauge Pressure* = 0. Pre *vstup* zvoľte *velocity inlet* a zadajte vstupnú rýchlosť (*Velocity Magnitude*) rovnú 1 m/s. Turbulentné okrajové podmienky v *Specification Method* zadajte pomocou *Modified Turbulent Viscosity* s vypočítanou hodnotou 0.00084.

V *Solution Methods* zmeňte len *Momentum* na *Second Order Upwind*.

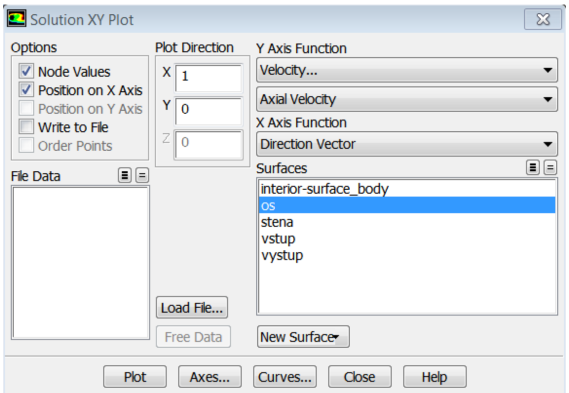
V okne *Monitors* po voľbe *Residuals – Print, Plot* všetky konvergenčné kritériá zmeňte na 0.000001 a potvrďte s *OK*.

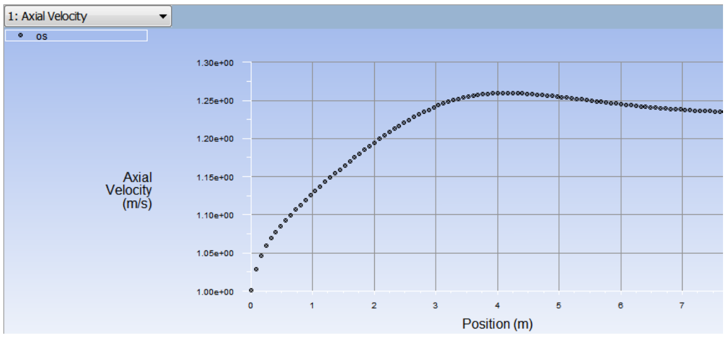
V *Solution Initialization* zadajte pre *Compute from: vstup*, 0.00084 pre *Modified Turbulent Viscosity* a kliknite na *Initialize*. Otvorte *Run Calculation* zadajte *Number of Iterations* = 1000 a odštartujte výpočet s *Calculate* (dvojitým kliknutím). Priebeh zvyškových hodnôt primárnych premenných ukáže monitor



d) Analýza výsledkov

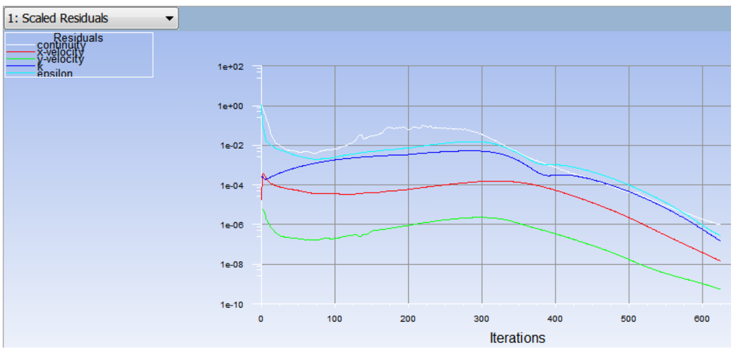
Z výsledkov overte najprv ustálenosť prúdenia (rýchlostného profilu). Zvoľte *Plots, XY Plot, Set Up...*, v *Y Axis Function* navoľte *Velocity...*, a *Axial Velocity*. V *Surfaces* vyznačte *os* a kliknite *Plot*



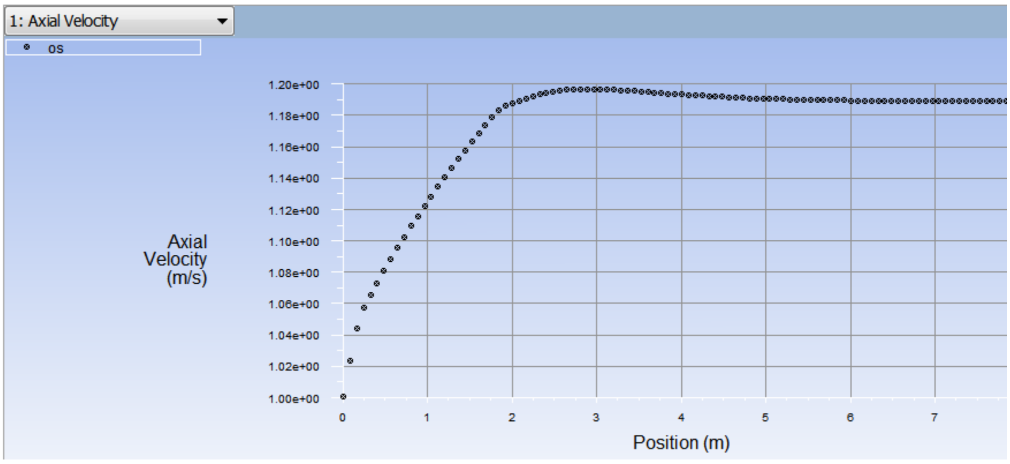


Tvar krivky aj hodnoty by ste mali dostať rovnaké. Rôzne vylepšenia obrázku si môžete vyskúšat vo voľbách *Axes...* a *Curves...* Je vidieť, že zhruba po 4 metroch už dochádza k ustáleniu charakteristík prúdenia, čo tento jednorovnicový model zvláda s určitými ťažkosťami.

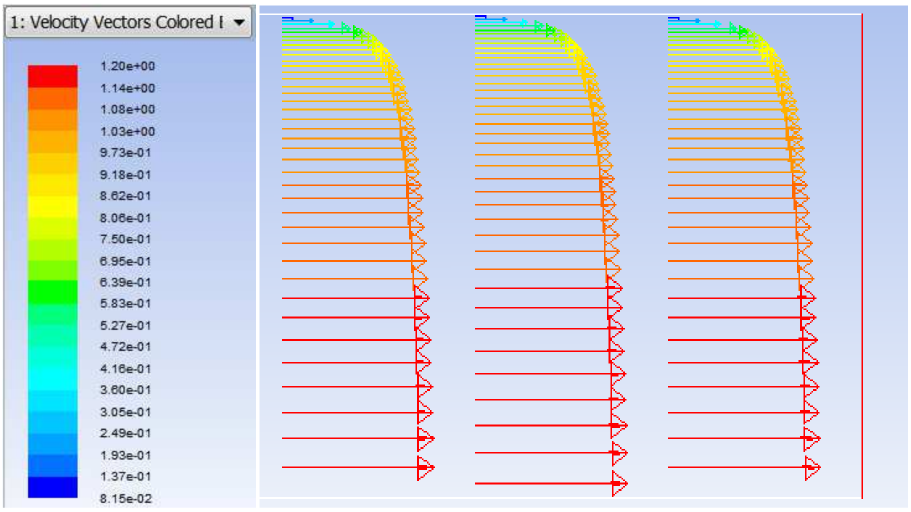
Na modelovanie turbulencie v blízkosti steny pre nízku (turbulentnú) hodnotu Reynoldsovho čísla (*Low-Reynolds-Number Turbulent Modeling*) možno využiť aj dvojrovnicový štandardný k-ε model s voľbou *Enhanced Wall Treatment* v okrajových turbulentných podmienkach. Zvoľte *Models, Viscous, k-epsilon (2 eqn), Standard, Enhanced Wall Treatment, OK* a zavrite okno. Zmeňte okrajové podmienky voľbami *Boundary Conditions*, *vstup*, *Edit...*, *Specification Method* = *Intensity and Hydraulic Diameter* a zadajte *Turbulent Intensity* = 0.049, *Hydraulis Diameter* = 0.2. Teraz treba ešte znovu nastaviť začiatočné podmienky a preto zvoľte *Solution Initialization, Initialize* a potvrďte *Warning* (v tomto prípade je to upozornenie, že predchádzajúce voľby nie sú uložené). Nasleduje voľba *Run Calculation* a *Calculate*



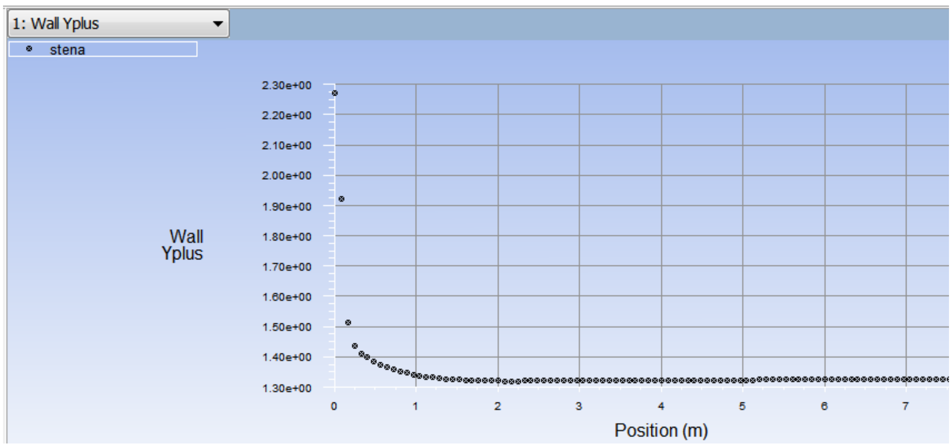
Teraz bez väčšej námahy zopakujeme už nastavené kreslenie priebehu axiálnej rýchlosti na osi rotácie po celej dĺžke potrubia príkazmi *Plots, XY-Plot, Set Up..., Plot* s presnejším výsledkom ako pri predchádzajúcom modeli



Pozrite si profil rýchlosti v časti potrubia s ustáleným prúdením. Zvoľte *Graphics and Animations, Vectors, Set up..., Vectors of Velocity, Color by Velocity..., Axial Velocity.* Ďalej v *Surfaces* vyznačte *interior surface_body* a *Display.* Miesto, ktoré vás zaujíma zväčšite pomocou alebo stredného tlačítka myši

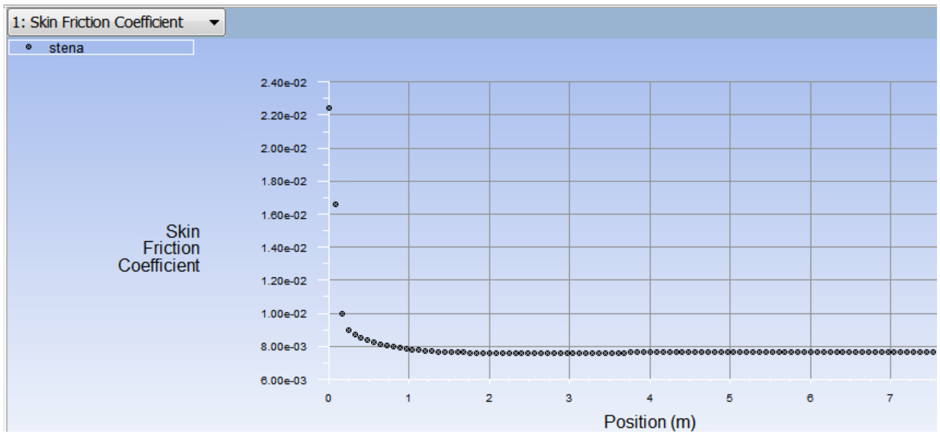


Skontrolujte ešte hodnotu normalizovanej vzdialenosti ťažiska y^+ najbližších buniek pri stene po celej dĺžke potrubia, ktorá by mala spĺňať podmienku $y^+ \leq 5$. Zvoľte *Plots, XY Plot, Set Up...*, v *Y Axis Function* vyznačte *Turbulence...*, a *Wall Yplus*. V *Surfaces* vyznačte *stena* a kliknite *Plot*



Ako vidieť, podmienka je splnená.

Analogicky možno analyzovať trecí koeficient. Zvoľte *Plots, XY Plot, Set Up...*, v *Y Axis Function* vyznačte *Wall Fluxes...,* a *Skin Friction Coefficient*. V *Surfaces* vyznačte *stena* a kliknite *Plot*



Z obrázku po odčítaní vyplýva

$$c_f = 0{,}0077 \qquad \rightarrow \qquad f = 4c_f = 0{,}0308$$

Zatvorte *Fluent* i *Project Schementic* s potvrdením, že chcete zmenený projekt uložiť. Pri budúcom pokračovaní v analýze výsledkov tejto úlohy stačí v pracovnom adresári kliknúť na súbor *Potrubie.wbpj* a po kompletnom otvorení úlohy kliknúť v *Project Schematic* na *Solution.* Otvoria sa voľby pre *Fluent* a po prípadných zmenách v nastavení a ich potvrdení v *Initialize* možno spustiť nový výpočet.