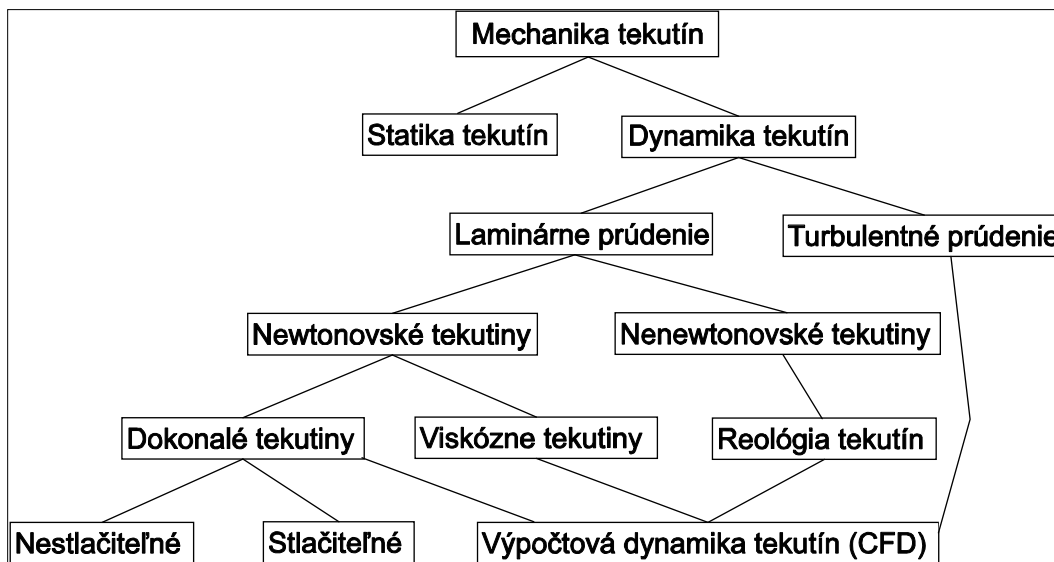


D 19 Dynamika tekutín

Základné pojmy

Dynamika tekutín (kvapalín a plynov) je rozsiahlou a z hľadiska teoretického, výpočtárskeho i experimentálneho zložitou časťou všeobecnej mechaniky tekutín (obr.1). Zaoberá sa analýzou pohybu tekutín, ktorej primárnym hľadaným výsledkom sú hodnoty rýchlosti, tlaku, hustoty a teploty vo vyšetrovanej oblasti. Tekutiny sa pritom považujú za kontinuum, a teda tak, ako v mechanike telies, sa využíva diferenciálny (infinitesimálny) element (častica tekutiny), ktorému možno priradiť uvedené makroskopické vlastnosti.



Obr.1 Základná skladba mechaniky tekutín

Tekutina sa účinkom šmykového napätia spojí a, na rozdiel od telesa, neobmedzene deformuje. Odpor tekutiny proti zmene tvaru sa nazýva *viskozitou* (vážkosťou). V prúdiacej tekutine sa viskozita snaží zoslabiť rozdiel (vzájomných) rýchlostí susedných vrstiev tekutiny, čím pripomína účinok trenia. Preto niekedy viskózne tekutiny nazývame tiež tekutiny s vnútorným trením. Mierou odporu, ktorý kladie tekutina deformácii, je dynamická viskozita μ [Pa·s]. Objavuje sa ako konštanta úmernosti v Newtonovom zákone viskozity

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

kde τ je šmykové napätie, u je rýchlosť toku tekutiny a y je súradnica kolmá na smer prúdenia. Tekutiny s takouto *lineárnou* závislosťou medzi gradientom rýchlosti (rýchlosťou uhlovej deformácie častice) a šmykovým napätím, sa nazývajú *newtonovské* tekutiny. Patrí medzi ne aj vzduch a voda a množstvo ďalších plynov a kvapalín. Viskozita tekutín závisí od teploty a tlaku a pri analýzach s prenosom tepla sa táto zmena zohľadňuje pomocou vhodných aproximačných závislostí.

Hustota tekutiny ρ sa definuje limitným pomerom hmotnosti častice Δm a jej objemu ΔV

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (2)$$

Kvapaliny, ktorých zmena objemu aj pri vysokých hodnotách všestranného tlaku, je veľmi malá, sa vo všeobecnosti považujú za nestlačiteľné, s konštantnou hodnotou hustoty počas dynamickej analýzy. Plyny sú stlačiteľné tekutiny s premenlivou hustotou, za určitých okolností sa však možno stretnúť aj s nestlačiteľným prúdením stlačiteľnej tekutiny.

V dynamike tekutín a pri výpočtových postupoch treba rozoznávať hlavné druhy (typy) prúdenia:

- Časovo ustálené (stacionárne) a časovo premenné (nestacionárne). Charakteristika je zrejmá priamo z názvov. V prvom prípade došlo k ustáleniu prúdenia vo vyšetrovanej oblasti a rýchlosť i ďalšie vlastnosti

tekutiny v každom bode analyzovanej oblasti sú nezávislé od času. V druhom prípade sú tieto veličiny časovo premenlivé

- Stlačiteľné a nestlačiteľné. Pri nestlačiteľnom prúdení je hustota častíc konštantná a divergencia rýchlosti je nulová. Pri stlačiteľnom prúdení tieto podmienky neplatia. Zohľadnenie stlačiteľnosti plynu sa stáva významným pri rýchlostiach s Machovým číslom nad 0,3 a pri analýzach s veľkými zmenami tlaku.
- Prúdenie dokonalej (ideálnej) tekutiny. V dynamike tekutín sa často analyzuje tekutina, ktorej viskozita je tak malá, že ju možno zanedbať. Takáto neviskózna (a tepelne neovplyvňovaná) tekutina sa nazýva dokonalá (ideálna).
- Jednorozmerné, dvojrozmerné, trojrozmerné prúdenie. Vo všeobecnosti každé prúdenie je trojrozmerné. To znamená, že parametre prúdenia, rýchlosť, tlak atď. sa menia v smere všetkých troch priestorových súradníc. V niektorých prípadoch možno analýzu prúdenia zjednodušiť na dvojrozmerné, prípadne jednorozmerné. Pri jednorozmernom prúdení možno parametre prúdenia vyjadriť ako funkcie jedinej vhodne zvolenej súradnice a času. Jediná priestorová súradnica sa obyčajne volí pozdĺž priamej alebo zakrývanej osi oblasti prúdenia. (Např. prúdenie v potrubí možno považovať za jednorozmerné, pokiaľ možno zanedbať zmeny tlaku a rýchlosti v priečnom priereze.) Pri dvojrozmernom prúdení sú všetky parametre prúdenia funkciou času a dvoch priestorových súradníc (např. x a y).
- Osovosymetrické. Prúdenie nazývame osovosymetrické, ak pri vhodne zvolených cylindrických súradniciach (z, r, φ) je rýchlosť prúdenia nezávislá na uhle φ a obvodová zložka rýchlosti u_φ je nulová.
- Adiabatické. Prúdenie bez výmeny tepla s okolím. Príkladom je prúdenie tekutiny cez tepelne izolovaný kanál alebo potrubie.
- Laminárne (prúdnicové) a turbulentné prúdenie. Pri laminárnom prúdení sa vrstvy (laminy) tekutiny s rozdielnymi rýchlosťami posúvajú po sebe bez vzájomného miešania. Dráhami častíc sú hladké pozorovateľné čiary (prúdnice), nedochádza k premiestňovaniu častíc naprieč prúdom tekutiny. Pri turbulentnom prúdení majú častice okrem postupnej rýchlosti aj tzv. flukтуаčnú (turbulentnú) nestacionárnu zložku rýchlosti, ktorá spôsobuje chaotický pohyb častíc naprieč prúdom.

V súvislosti s laminárnym a turbulentným prúdením užitočnú informáciu môže pre určitý prípad prúdenia poskytnúť Reynoldsovo číslo označované Re . Je to bezrozmerné číslo vyjadrujúce približný pomer medzi zotrvačnými a viskóznymi silami s definíciou v tvare

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (3)$$

kde u je priemerná rýchlosť prúdenia a L charakteristický rozmer pre danú situáciu. Pri veľkých hodnotách Re (veľká hustota, veľká rýchlosť i veľký charakteristický rozmer a malá viskozita tekutiny) prevládajú zotrvačné sily vyvolávajúce turbulentné prúdenie, pri opačných hodnotách prevládajú viskózne sily a prúdenie je laminárne. Hodnota charakteristického rozmeru je pre významné konfigurácie vyšetrovanej oblasti dohodnutá. Např. pre prúdenie v potrubíach a uzavretých kanáloch je to hydraulický priemer.

Lagrangeov a Eulerov popis prúdenia tekutín

Lagrangeov spôsob analýzy pohybu sme pre prípad statickej úlohy telesa s veľkými deformáciami podrobne rozoberali v doplnku D3. Tento základný postup platí aj pre kinematiku tekutiny a treba ho pre lepšie pochopenie Eulerovho postupu a Eulerových vzťahov poznať, i keď sa v dynamike tekutín využíva len v špeciálnych prípadoch prúdenia a pri špeciálnych metódach riešenia úlohy.

Pri Lagrangeovom prístupe sa *trajektórie* pohybu častíc (veľmi malých objemov) tekutiny, označených v čase $t = t_0$ materiálovými (Lagrangeovými, začiatočnými, na čase nezávislými) súradnicami $\mathbf{X}$ do aktuálnej polohy $\mathbf{x}$ sledujú pomocou relačnej vektorovej funkcie $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (4)$$

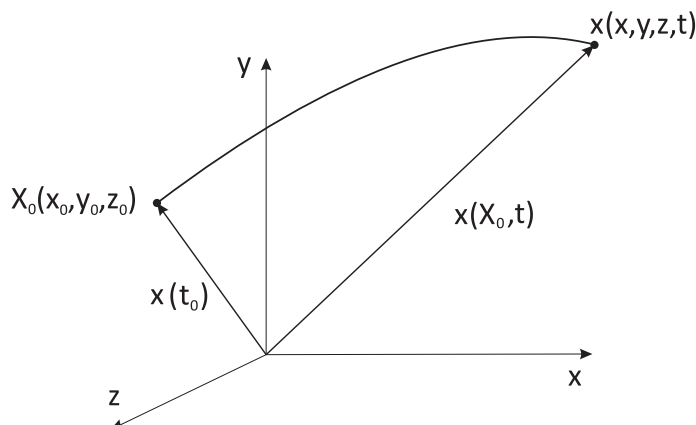
Funkcia $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ (pokiaľ sa nám ju pre určitý časový interval podarí určiť) udáva v (4) jednoznačný spojitý vzťah medzi začiatočnou (vzťažnou) polohou častice $\mathbf{X}$ a polohou častice $\mathbf{x}$ v čase t . Pre konkrétnu časticu $\mathbf{X}_0$, ktorá má v čase t_0 referenčné súradnice (x_0, y_0, z_0) , grafický obraz funkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t)$ predstavuje *trajektóriu* (dráhu pohybu) v časovom intervale t_0 až t (obr.2).

Teória spojitého prúdenia predpokladá možnosť invertovania tohto vzťahu (Jakobián tejto transformácie musí byť nenulový), čo možno zapísať v tvare

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

Funkcia $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ udáva začiatočnú polohu častice, ktorá v čase t je v polohe $\mathbf{x}$.

Pri Lagrangeovej formulácii úlohy meniacu sa polohu častice a jej meniace sa termodynamické vlastnosti (hustotu, tlak, teplotu) priamo sledujeme ako spojité funkcie začiatočnej polohy častice a času. Derivácie týchto vlastností podľa času sa nazývajú *materiálové* derivácie, pretože patria konkrétnej materiálovej častici identifikovanej začiatočnou polohou $\mathbf{x}(t_0)$.



Obr.2 Materiálový popis pohybu častice tekutiny

Pretože v dynamike tekutín nás obvyčajne zaujíma situácia v nemenných bodoch určitej oblasti, voči Lagrangeovmu prístupu sa preferuje iný postup, nazývaný Eulerov. Pri Eulerovom popise prúdenia tekutín sa v určitej geometricky špecifikovanej oblasti hľadá priamo pole rýchlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, hustoty $\rho(\mathbf{x}, t)$, tlaku $p(\mathbf{x}, t)$ a teploty $T(\mathbf{x}, t)$, pričom (priestorové, Eulerove) súradnice $\mathbf{x}$, na rozdiel od Lagrangeovho popisu, sú v tejto oblasti fixné súradnice zadané v zvolenom súradnicovom systéme. Pri takomto popise prúdenia si treba uvedomiť, že rýchlosť i ďalšie vlastnosti tekutiny v danom nemennom bode $\mathbf{x}$, nepatria jednej konkrétnej častici, ale postupnosti častíc, ktoré prúdia cez tento bod v skúmanom časovom intervale.

Materiálová derivácia v Eulerovej formulácii

Pretože priestorové súradnice $\mathbf{x}$ sú pri Eulerovej formulácii vo vyšetrovanej oblasti fixné, nezávislé na čase, časové derivácie vlastností častíc prúdiacej tekutiny sa pri Eulerovej formulácii vyjadrujú zložitejšie. Je tiež zrejmé, že v takomto prípade deriváciou $\mathbf{x}$ podľa času nedostaneme rýchlosť, a teda rýchlosť v takomto prípade treba považovať za jednu z primárnych neznámych.

Predpokladajme, že pole rýchlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ poznáme, a pretože je to pole spojitých funkcií, môžeme pre zvolený konkrétny bod (pevný, časovo nemenný diferenciálny objem $dx dy dz$) vypočítať vektorovú funkciu $\partial \mathbf{v} / \partial t$, ktorá však určuje len tzv. *lokálne* zrýchlenie prúdu častíc, ktorých trajektórie prechádzajú týmto bodom. Nie je to zrýchlenie konkrétnej častice, ktoré potrebujeme pri formulácii úlohy do Newtonovho pohybového zákona ($d\mathbf{F} = d\mathbf{m} \mathbf{a}_L$). Ani pri Eulerovej formulácii úlohy teda nie je možné sa vyhnúť *materiálovej* derivácii rýchlosti a ďalších vlastností častice podľa času, avšak sme nútení ju vykonať v Eulerovom súradnicovom systéme. Aby sme materiálovú deriváciu odlíšili od lokálnej derivácie, označuje sa Df / Dt , kde symbolom f je formálne označená časovo závislá vlastnosť materiálovej častice tekutiny.

Pomocou vzťahu (4) môžeme materiálovú deriváciu *skalárnej* vlastnosti častice f s materiálovými súradnicami $\mathbf{X}$, ktorá sa v Eulerovom súradnicovom systéme v čase t nachádza v bode $\mathbf{x}$, vyjadriť pomocou pravidiel o parciálnom derivovaní zloženej funkcie takto (indexy pri deriváciách udávajú veličinu, ktorá je pri danej derivácii konštantná)

$$\left. \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (6)$$

kde $\mathbf{v}$ je vektor rýchlosti v Eulerovom súradnicovom systéme

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) \equiv u(x, y, z, t)\mathbf{i} + v(x, y, z, t)\mathbf{j} + w(x, y, z, t)\mathbf{k} \quad (7)$$

Podľa (6) napr. materiálová derivácia hustoty bude

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (8)$$

Materiálovú deriváciu vektorovej vlastnosti častice $\mathbf{f}$ v Eulerovom súradnicovom systéme dostaneme analogicky a platí

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} \quad (9)$$

Podľa (9) zrýchlenie v Eulerovom systéme (materiálová derivácia rýchlosti $\mathbf{v}$) je

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (10)$$

so zložkami v rozpísanom tvare

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (11)$$

Prúdnice a trajektórie

Prúdnica je čiara $s = s(x, y, z, t)$, ktorej elementárny vektor $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ je v každom bode Eulerovho súradnicového systému $\mathbf{x}(x, y, z)$ rovnobežný s vektorom lokálnej rýchlosti $\mathbf{v}$ (obr.3a). Potom musí platiť

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} \times \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (w dy - v dz)\mathbf{i} + (u dz - w dx)\mathbf{j} + (v dx - u dy)\mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Z tejto podmienky dostávame tri diferenciálne rovnice, ktoré definujú prúdnicu

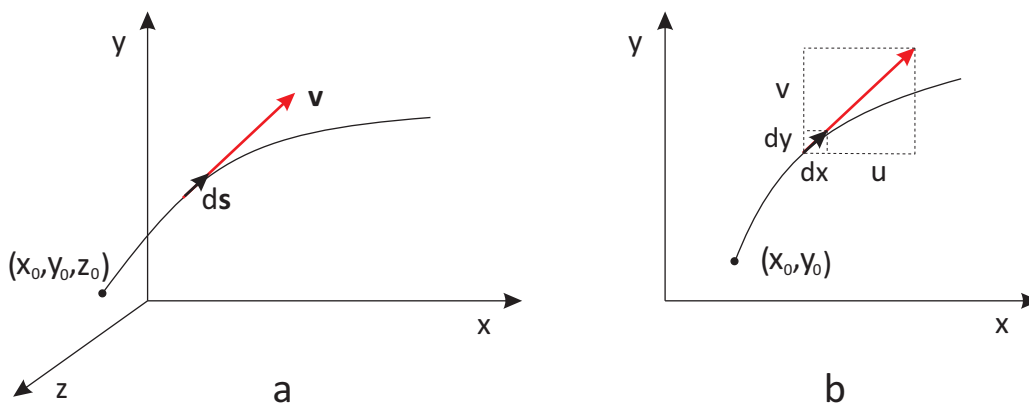
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{w}{v} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{u}{w} \quad (12)$$

Pri riešení (integrovaní) tejto sústavy sa integračné konštanty určujú z podmienky, že v čase t_0 prúdnica prechádza cez bod (x_0, y_0, z_0) .

Pri rovinnom prúdení (obr.3b) je $dz = 0$ a $w = 0$, takže tvar prúdnice $y = f(x, t)$, možno určiť z diferenciálnej rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (13)$$

za predpokladu, že poznáme zložky rýchlosti $u(x,y,t)$ a $v(x,y,t)$ a v čase t_0 je udaný začiatkový bod (x_0, y_0) prúdnice. Pri nestacionárnom prúdení sa tvar prúdnic vo vyšetrovanom časovom intervale mení, pri ustálenom prúdení sú to nemenné čiary totožné s dráhami (trajektóriami) častíc prúdiacej tekutiny.

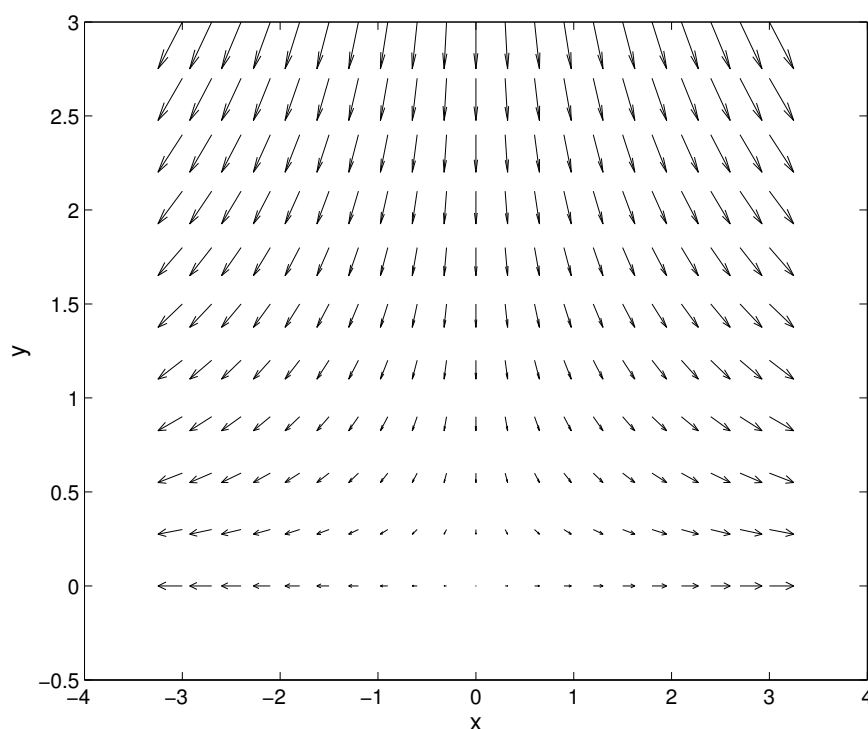


Obr.3 a) Prúdnica v priestore b) Prúdnica rovinného prúdenia

Ako ilustračný príklad využitia uvedených vzťahov určíme a nakreslíme prúdnice rovinného ustáleného prúdenia so zložkami rýchlosti

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= x & [m/s] \\ v(x,y,t) &= -y & [m/s] \end{aligned} \quad (14)$$

vo zvolenej ohraničenej oblasti $x \in \langle -3, 3 \rangle$ a $y \in \langle 0, 3 \rangle$, (obr.4).



Obr.4 Vektory rýchlosti prúdenia so zložkami (14)

Diferenciálna rovnica prúdnic pre takéto pole rýchlosti podľa (13) je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

Je to jednoduchá diferenciálna rovnica so separovanými premennými, s jednoduchým riešením

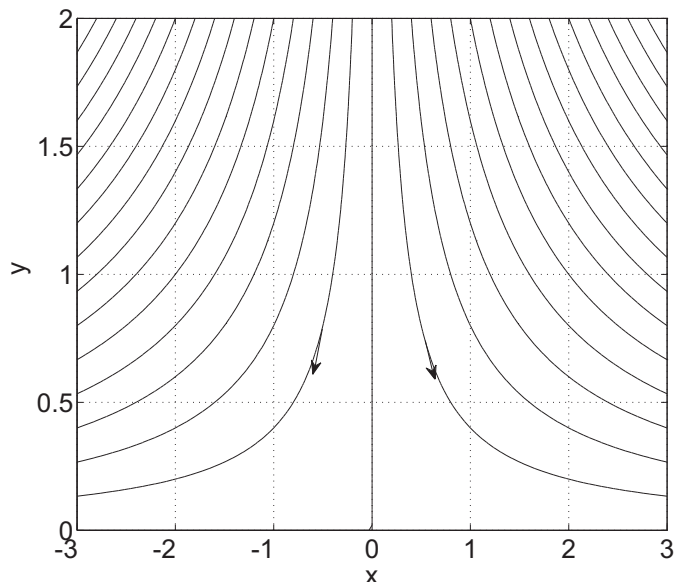
$$y = \frac{C}{x}$$

Integračnú konštantu určuje voľba konkrétneho bodu (x_0, y_0) na prúdnicí, z čoho dostávame $C = x_0 y_0$ a výsledný vzťah pre čiaru prúdnice potom je

$$y = \frac{x_0 y_0}{x} \quad (15)$$

Voľbou rôznych bodov (x_0, y_0) dostaneme sústavu prúdnic charakterizujúcich prúdenie definované poľom (14). V prípade, že pole rýchlostí je nestacionárne, dostaneme rovnakým postupom obraz prúdnic len v určitom časovom okamžiku určenom hodnotou času t . Pri integrovaní diferenciálnych rovníc vystupuje potom čas t ako konštanta. V prípade priestorového prúdenia, zadaného priestorovým poľom rýchlostí, treba pre určenie prúdnic riešiť sústavu diferenciálnych rovníc (12) a prúdnice znázorňovať v priestorovej oblasti (kontrolnom objeme). Na takúto úlohu je výhodné použiť vhodné komerčné programové prostriedky (napr. Matlab, Mathematica a i.), ktorých špeciálne funkcie určujú a nakreslia prúdnice priamo zo zadaného poľa rýchlostí. V našom príklade môžeme prúdnice, ktoré znázorňujú zvislý prúd tekutiny narážajúci na pevnú stenu, graficky znázorniť z funkcií (15) pomocou jednoduchého programu (Matlab):

```
[x,y]=meshgrid(linspace(-3,3),linspace(0.,2));
z=x.*y;
contour(x,y,z,[-8:0.4:8]);
```



Obr.5 Prúdnice rýchlostného poľa (14)

Medzi dôležité prvky grafického zviditeľňovania prúdenia tekutín patria aj *trajektórie*, t.j. čiary znázorňujúce trasy, ktoré jednotlivé častice prúdiacej tekutiny vykonali v určitom časovom intervale. Ako sme už uviedli, pri Lagrangeovom prístupe sa trajektórie pohybu častíc (diferenciálnych objemov), označených v čase $t = t_0$ materiálovými súradnicami $\mathbf{X}$, do aktuálnych súradníc $\mathbf{x}$ sledujú pomocou relačnej funkcie (časovo závislého polohového vektora) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Po určení $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ máme priamo k dispozícii funkciu na vykreslenie trajektórií častíc so začiatočnou polohou $\mathbf{X}$. Pre rýchlosť častice platí ($\mathbf{X}$ nezávisí od času)

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)]}{dt} \quad (16)$$

Tento vzťah možno využiť na nájdenie trajektórií častíc v Eulerovej formulácii prúdenia po určení poľa rýchlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Pre dráhu častice $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ so začiatočnou polohou (x_0, y_0, z_0) v čase t_0 budeme vyžadovať, aby sa

jej rýchlosť (16) v časovom intervale t_0 až t v každom bode rovnala známej rýchlosti $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Potom dráhu častice platí vektorová diferenciálna rovnica

$$\left. \frac{d[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)]}{dt} = \frac{d[\mathbf{x}(t)]}{dt} \right|_{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(x, y, z, t) \quad (17)$$

Funkcie zložiek pohybového vektora častice $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ zo známych zložiek rýchlosti $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ potom podľa (17) dostaneme zo sústavy diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= u(x(t), y(t), z(t), t) \\ \frac{d}{dt} y(t) &= v(x(t), y(t), z(t), t) \\ \frac{d}{dt} z(t) &= w(x(t), y(t), z(t), t) \end{aligned} \quad (18)$$

so začiatocnými podmienkami $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$.

Zo (17) vyplýva, že v čase t je smer trajektórie tangenciálny k vektoru rýchlosti a teda i k prúdnicí. V iných časoch vo všeobecnosti existencia normálovej zložky jej rýchlosti trajektóriu odkloní od prúdnice. Výnimkou je ustálené prúdenie, kedy pole rýchlosti je na čase nezávislé a prúdnice a trajektórie sú rovnaké krivky.

Ako ilustračný príklad využitia vzťahov (18) určíme a nakreslíme trajektóriu častice tekutiny v nestacionárnom rovinnom rýchlostnom poli

$$\mathbf{v}(x, y, t) = (2 - 3x - 2y)\mathbf{i} + (e^{-5t} - y)\mathbf{j} \quad (19)$$

ktorá sa v čase $t = 0$ nachádza v polohe $x_0 = 0$ a $y_0 = 2$. Sústava dvoch diferenciálnych rovníc pre náš príklad potom podľa (18) je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= 2 - 3x(t) - 2y(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) &= e^{-5t} - y(t) \end{aligned}$$

Sústavu s uvedenou začiatocnou podmienkou vyriešime pomocou programu (*Mathematica*)

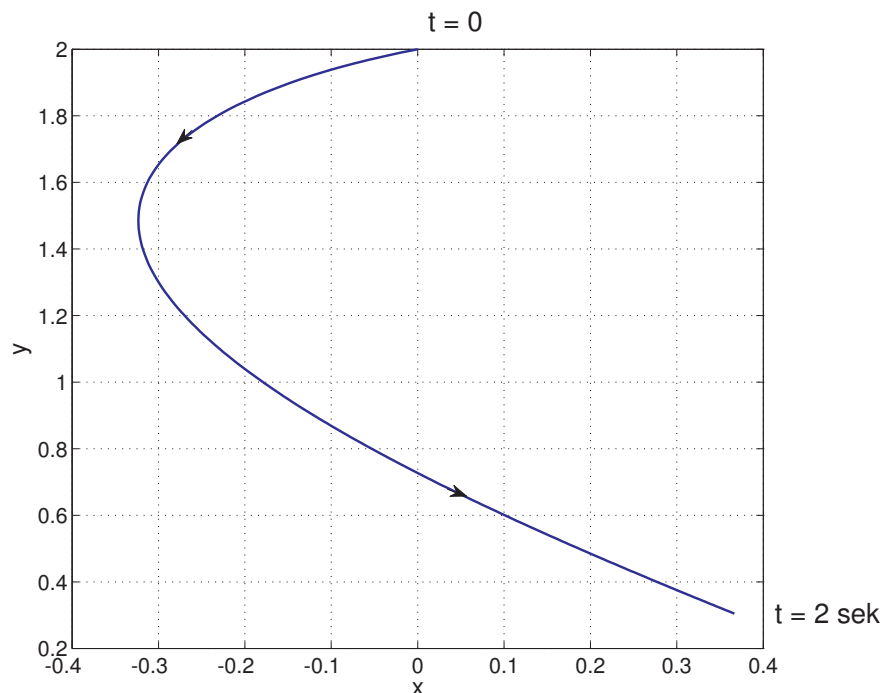
```
DSolve[{x'[t] + 3 x[t] + 2 y[t] == 2, y'[t] + y[t] == E^(-5 t), x[0] == 0, y[0] == 2}, {x, y}, t]
{{x -> Function[{t}, (1/12) E^(-5 t) (-3 + 22 e^(2 t) - 27 e^(4 t) + 8 e^(5 t))], y -> Function[{t}, (1/4) E^(-5 t) (-1 + 9 e^(4 t))]}}
```

Funkcie zložiek trajektórie častice so zvolenou začiatocnou polohou v závislosti od času teda sú

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{11}{6} e^{-3t} - \frac{1}{4} e^{-5t} - \frac{9}{4} e^{-t} + \frac{2}{3} \\ y(t) &= \frac{9}{4} e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-5t} \end{aligned}$$

a grafické znázornenie pohybu častice v časovom intervale 0 až 2 sekundy je už potom jednoduché (*Matlab*)

```
t=0:0.01:2;
x=11/6*exp(-3*t)-1/4*exp(-5*t)-9/4*exp(-t)+2/3;
y=-1/4*exp(-5*t)+9/4*exp(-t);
plot(x,y)
```



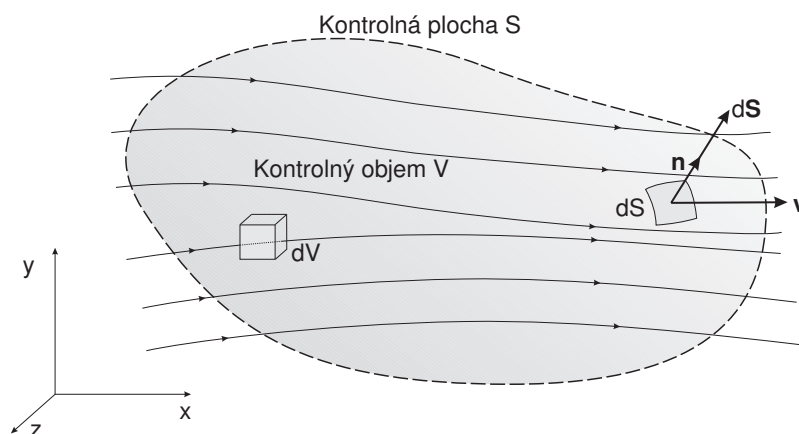
Obr.6 Trajektória častice so začiatočnou polohou (0,2) v nestacionárnom rýchlostnom poli (19) v časovom intervale 0 až 2 sekundy

Vhodnou voľbou začiatočných polôh a programovým spracovaním tohoto postupu možno vytvoriť sieť trajektórií častíc v celej vyšetrovanej oblasti. Tvorba trajektórií v 3D oblasti je úplne analogická.

Zákon zachovania hmotnosti - rovnica kontinuity

Dynamika prúdu tekutiny sa riadi základnými fyzikálnymi princípmi a ich aplikácia na vyšetrovanú oblasť, tzv. kontrolný objem, je prvým krokom prípravy analytického, resp. numerického riešenia fluidnej úlohy.

Uvažujme *kontrolný objem* V uzavretý *kontrolnou plochou* S , ktorý nech má v priestore fixnú, na čase nezávislú polohu definovanú priestorovými Eulerovými súradnicami x, y, z . Kontrolný objem je otvorený, tekutina prúdi cez kontrolnú plochu a kontrolný objem (obr.7).



Obr.7 Kontrolný objem

Pre prúdiacu tekutinu cez kontrolný objem musí platiť princíp zachovania hmotnosti. To znamená, že hmotnosť vytečenej tekutiny z kontrolného objemu cez kontrolnú plochu za jednotku času (napr. v kg/s) sa musí rovnať úbytku hmotnosti tekutiny v kontrolnom objeme za tento čas. Elementárny hmotnostný tok cez plochu dS je (obr.7)

$$\rho \mathbf{v}_n dS = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (20)$$

Pozitívna hodnota tohoto výrazu predstavuje hmotnostný *výtok*, pretože ak vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ smeruje von z plochy, vektorový súčin $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ je pozitívny (vektor $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor *vonkajšej* normály k ploche dS , totiž smeruje vždy von z kontrolnej plochy). Potom pre hmotnostný výtok na celej kontrolnej ploche platí

$$\text{výtok} = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (21)$$

Teraz vyjadríme úbytok hmotnosti v kontrolnom objeme za jednotku času. Celková hmotnosť tekutiny vo vnútri kontrolného objemu je $\int_V \rho dV$ a jej *úbytok* za jednotku času

$$\text{úbytok} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (22)$$

Z rovnosti pravých strán rovníc (21) a (22) dostávame *rovnicu kontinuity* v integrálnom tvare

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (23)$$

Rovnicu kontinuity v tvare diferenciálnej rovnice možno odvodiť z bilancie hmotnostného toku cez diferenciálny objem dV . Z rovnice (23) sa však k nej dopracujeme jednoduchšie. Pretože hranice objemového integrálu v tejto rovnici nezávisia od času, možno ju prepísať na

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (24)$$

a po prevode plošného integrálu (podľa Gaussovej vety o divergencii) na objemový platí

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (25)$$

Pretože kontrolný objem V je ľubovoľný, nulovú hodnotu integrálu v (25) zaručí len podmienka, že jeho integrand bude rovný nule v každom bode kontrolného objemu. Dostávame tak rovnicu kontinuity v tvare diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (26)$$

O rovnici kontinuity, i o ďalších základných rovniciach prúdenia tekutiny, ktoré sú odvodené a platia v Eulerovom súradnicovom systéme, hovoríme, že sú v *konzervatívnom* tvare. Pre rovnice v Lagrangeovej formulácii sa používa prívlastok *nekonzervatívny* tvar. Všetky tvary rovníc sú však spojené a odvoditeľné jedna z druhej, pretože vyjadrujú rovnaký fyzikálny princíp. Rozmanitosť ich foriem umožňuje optimálnu voľbu rovnice pre príslušný typ úlohy a zvolený spôsob jej riešenia.

Rovnica (26) sa zjednoduší pre prípad konštatnej hustoty tekutiny. Vtedy $\partial \rho / \partial t = 0$ a po vydelení s $\rho (\neq 0)$ dostávame

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

Je to rovnica kontinuity nestlačiteľnej tekutiny (prúdenia s nulovou divergenciou rýchlosti).

Zákon zachovania hybnosti - pohybová rovnica

Zákon zachovania hybnosti hovorí, že hybnosť systému sa nemení, pokiaľ naň nepôsobí vonkajšia sila. Hybnosť malej častice tekutiny s objemom $dV = dx dy dz$ (obr.7, obr.8) a s hmotnosťou m pohybujúcej sa rýchlosťou $\mathbf{v}$ je $m\mathbf{v}$ a časová zmena jej hybnosti je vlastne vyjadrenie Newtonovho pohybového zákona

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (28)$$

Je to vektorová rovnica, ktorú možno nahradiť tromi skalárnymi rovnicami. Uvažujme najprv kvôli prehľadnosti len x-ovú zložku tohto vzťahu

$$ma_x = F_x \quad (29)$$

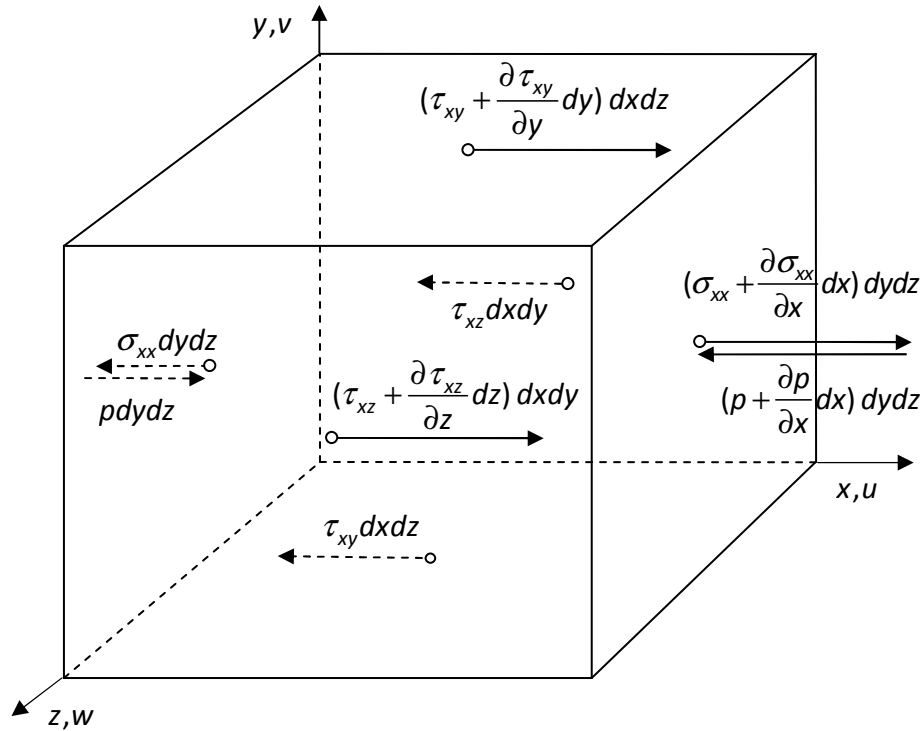
Hmotnosť častice je

$$m = \rho dx dy dz \quad (30)$$

a jej (materiálové) zrýchlenie v x -ovom smere

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (31)$$

Zložitejšie je vyjadrenie pravej strany rovnice (29), pretože na časticu pôsobia viaceré, typovo rozdielne sily.



Obr.8 x-ové zložky plošných síl pôsobiace na pohybujúcu sa časticu

Na časticu môže pôsobiť objemová sila (napr. gravitačná sila) $\mathbf{f}$ vztiahnutá na jednotku hmotnosti [N/kg], ktorej silový účinok v smere x je

$$\rho f_x dx dy dz \quad (32)$$

Ďalej na časticu pôsobia plošné sily a to jednak *termodynamický* tlak (t.j. stavová termodynamická premenná) p okolitej tekutiny, ako aj zložky tenzora napätia (pozri napr. D2), pretože okolité častice s rozdielnou rýchlosťou pri existencii viskozity cez zložky napätia brzdia (alebo zrýchľujú) jej pohyb. Kladné znamienko prírastku rýchlosti a teda i prírastku plošných síl sa zavádza v smere kladného prírastku príslušnej súradnice. Prírastky plošných síl v smere osi x potom možno určiť vektorovým sčítaním síl vyznačených na obr.8. Po pripočítaní objemovej sily (32) výsledná silová zložka je

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz + \rho f_x dx dy dz \quad (33)$$

Po dosadení (30), (31) a (33) do (29) a vydelení oboch strán tejto rovnice objemom častice dostaneme pohybovú rovnicu častice v x -ovom smere

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \quad (34)$$

a analogickým postupom aj v smere y

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \quad (35)$$

a v smere z

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (36)$$

Skalárne rovnice (34), (35) a (36) platia pre časticu, ktorá sa pohybuje s prúdom tekutiny je to teda *nekonzervatívna* forma týchto rovníc v Lagrangeovej formulácii. Rovnice možno previesť do *konzervatívneho* tvaru v Eulerových súradniciach transformáciou ľavých strán týchto rovníc, ktoré obsahujú materiálovú deriváciu zložiek rýchlosti spolu s funkciou hustoty častice $\rho(t)$. Jej prepis pre x-ový smer podľa (10) je

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla u \quad (37)$$

Prvý člen na pravej strane rovnice (37) sa podľa definície derivácie súčinu dá prepísať na

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (38)$$

a pre druhý člen z pravidla výpočtu divergencie súčinu skalára s vektorom dostávame

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (39)$$

Dosadením (38) a (39) sa rovnica (37) zmení na

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) \quad (40)$$

a pretože člen v hranatej zátvorke je podľa rovnice kontinuity (26) rovný nule, platí

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) \quad (41)$$

Výsledky pre ďalšie dva smery sú analogické a ich dosadením do (34), (35) a (36) dostávame najvšeobecnejší *konzervatívny* tvar pohybových rovníc tekutiny

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{v}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{v}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned} \quad (42)$$

Možno ich vyjadriť aj jedinou vektorovou rovnicou

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (43)$$

kde

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (44)$$

je tenzor napätia a $\mathbf{v} \mathbf{v}$ je dyadický súčin vektorov rýchlosti. Rovnice platia pre newtonovské i nenewtonovské tekutiny podľa toho, aké konštitutívne vzťahy sa použijú pre určenie zložiek napätia.

Rozpísaním derivácií súčinov a zohľadnením (26) možno ľavú stranu rovnice (43) zjednodušiť a dostávame

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (45)$$

resp. s prihliadnutím na (10)

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (46)$$

V rozpísanom tvare rovnice (45) sú

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned} \quad (47)$$

Konštitutívne vzťahy pre tekutiny newtonovského typu

Vyšetríme najprv spôsob, ako sa rýchlosť tekutiny $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ môže meniť v okolí bodu $\mathbf{x}'$ zvoleného v rýchlostnom poli. S využitím indexového zápisu použijeme Taylorov rozvoj vektora v_i v okolí bodu x'_j a po zanedbaní nelineárnych členov dostávame

$$v_i(x_j, t) = v_i(x'_j, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (48)$$

kde $\delta x_j = (x_j - x'_j)$. Po rozklade tenzora $\partial v_i / \partial x_j$ na symetrickú a antisymetrickú časť, môžeme (48) zapísať v tvare

$$v_i(x_j, t) = v_i(x'_j, t) + \dot{\epsilon}_{ij} \delta x_j + \dot{\omega}_{ij} \delta x_j \quad (49)$$

kde symetrická časť $\partial v_i / \partial x_j$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (50)$$

sa nazýva *tenzor rýchlosti deformácie* a antisymetrická časť

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (51)$$

je tenzor rýchlosti elementárnej rotácie.

Prvý člen na pravej strane rovnice (49) je rýchlosťou translácie, druhý rýchlosťou deformácie a posledný rýchlosťou rotácie tekutiny v okolí bodu so súradnicami x_j . Pretože na deformáciu vplyva len tenzor rýchlosti deformácie, vzťahy, ktoré zviažu tento tenzor s tenzorom napätia, budú hľadané konštitutívne vzťahy tekutiny.

Tenzor rýchlosti deformácie (50) je po formálnej stránke totožný s tenzorom malej deformácie telesa [D2], stačí v ňom nahradiť vektor rýchlosti vektorom posunutia. *Lineárny* Newtonov zákon viskozity (1) zase po nahradení viskozity modulom pružnosti a rýchlosť posunutím, je totožný s lineárnym Hookeovým zákonom pre jednoosú napätosť telesa. Táto analógia spolu s experimentálnym poznatkom, že tekutiny, z hľadiska ich vlastností sú *izotropné* látky, viedlo k odvodeniu jednoduchých lineárnych konštitutívnych vzťahov rovnakým postupom, ako sa to urobilo pre teleso z izotropného materiálu (pozri napr. [Lit1]). Sú to rovnice

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad (52)$$

kde ale teraz μ je dynamická viskozita tekutiny a λ sa nazýva *druhá* (objemová) viskozita (δ_{ij} je jednotkový Kroneckerov tenzor). Obe tieto charakteristiky viskozity *newtonovskej* tekutiny sú závislé od tlaku a teploty. Pri

kvapalinách sa viskozita so stúpajúcou teplotou (spravidla) znižuje, pri plynach je to naopak. Pri kvapalinách je pritom viskozita (približne) priamo úmerná tlaku, kým pri plynach je μ v dosť širokom rozsahu tlakov (pri konštantnej teplote) na tlaku takmer nezávislé.

Z prvého člena na pravej strane rovnice (52) vidieť, že pri stlačiteľných tekutinách sa uplatní aj druhá viskozita λ (pri nestlačiteľných tekutinách je pomerná zmena objemu ε_{kk} rovná nule). Pre jej určenie sa bežne používa vzťah vyplývajúci zo Stokesovej hypotézy $\lambda + 2\mu/3 = 0$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (53)$$

ktorý však bol potvrdený len pre jednoatómové plyny. Na druhej strane treba poznamenať, že vplyv dilatačnej (objemovej) deformácie je pri kvázi nestlačiteľných tekutinách zanedbateľný a pri stlačiteľných sú normálové zložky napätí v porovnaní so šmykovými významné len pri špeciálnych úlohách s veľkými tlakovými gradientami (napr. pri analýze rázových tlakových vln).

Rozpísané zložky napätí (52) s využitím symetrie tenzora napätia sú

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{zz} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

Po ich dosadení do (46) možno pohybové rovnice newtonovskej tekutiny zapísať v kompaktnom vektorovom zápise takto

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla(\lambda \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mu \cdot (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)) + \rho \mathbf{f} \quad (55)$$

Pohybové rovnice (v konzervatívnom tvare) pre jednoduchšie prípady prúdenia možno z rovníc (55) určiť jednoducho zavedením príslušných zjednodušení. Napr. pre nestlačiteľné viskózne prúdenie, kedy podľa (27) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, a tiež $\lambda = 0$, $\mu = \text{konšt.}$, sa (55) zjednoduší na

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (56)$$

a po rozpísaní dostávame tzv. Navier – Stokesove rovnice

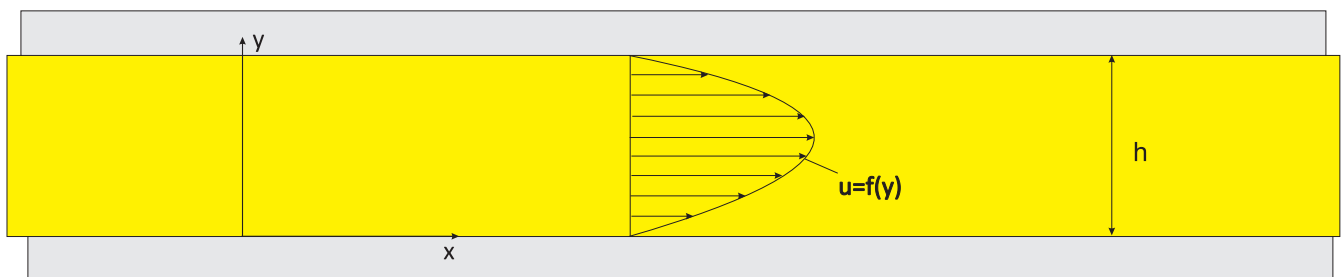
$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_x \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho f_y \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho f_z \end{aligned} \quad (57)$$

V prípade ideálnej neviskózne tekutiny ($\mu = 0$) sa tieto rovnice zredujú na Eulerove rovnice

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z\end{aligned}\quad (58)$$

Príklad 1

Využitím Navier-Stokesových rovníc (57) určte pohybovú rovnicu ustáleného laminárneho prúdenia viskózne newtonovskej tekutiny medzi dvomi rovnobežnými nekonečne veľkými nepohyblivými stenami (pozri obrázok). Účinok objemových síl $\mathbf{f}$ (vlastnú tiaž tekutiny) zanedbávame. Prúdenie tekutiny v smere osi x vyvoláva tlakový gradient $dp/dx = \text{konšt.}$



Riešenie

Ľavé strany rovníc (57) sa rovnajú nule, pretože materiálové zrýchlenie častíc $D\mathbf{V}/Dt$ pri ustálenom prúdení je nulové a pretože tiež platí $v = w = 0$, dostávame diferenciálnu rovnicu pre jedinú nenulovú zložku rýchlosti

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

Dvojnásobným integrovaním tejto rovnice podľa y dostávame

$$\frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 = \mu u$$

a po určení integračných konštánt z okrajových podmienok ($y = 0 \rightarrow u = 0, y = h \rightarrow u = 0$) pre zložku rýchlosti tekutiny v smere osi x platí

$$u(y) = \frac{y^2 - hy}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

čo je rovnica paraboly s maximálnou hodnotou rýchlosti vo vzdialenosti $y = h/2$.

Zákon zachovania energie - rovnica energie

Fyzikálny princíp, z ktorého sa vychádza pri odvodení tejto rovnice, je prvý termodynamický zákon. Podľa tohto zákona zmena energie termodynamického systému sa rovná súčtu privedeného (odvedeného) tepla do systému a práci, ktorú na ňom vykonajú vonkajšie sily. Za termodynamický systém budeme považovať malý kontrolný objem V tekutiny s kontrolnou plochou S , znázornený na obr. 7, ktorý ale teraz je uzatvorený a pohybuje sa s prúdom tekutiny rýchlosťou $\mathbf{V}$ (ide teda o Lagrangeov popis pohybu).

Zmena celkovej energie E kontrolného objemu za jednotku času (zmena vnútornej energie e a kinetickej energie $|\mathbf{V}|^2/2$) vzťahnutá na jednotku hmotnosti je

$$\int_V \rho \frac{DE}{Dt} dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) dV \quad (59)$$

Privedené teplo do objemu V podľa Fourierovho zákona a s využitím Gaussovej vety je

$$-\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_S (-\lambda \nabla T) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dV \quad (60)$$

kde uvažujeme izotropný materiál s koeficientom tepelnej vodivosti λ a $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k ploche.

Práca objemových síl je

$$\int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \quad (61)$$

a prácu plošných síl (tlak plus šmykové a normálové napätia) opäť prevedieme pomocou Gaussovej vety na objemový integrál

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (-p + \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dS = \int_V \nabla \cdot (-p\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (62)$$

Podľa prvej termodynamickkej vety teda pre zmenu energetickej bilancie platí

$$\int_V \rho \frac{DE}{Dt} dV = \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dV + \int_V \nabla \cdot (-p\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dV + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \quad (63)$$

a pretože všetky integrály sú vyjadrené pre ľubovoľný objem, pre každý jeho bod musí platiť

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (-p\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (64)$$

čo je diferenciálna rovnice energie prúdiacej tekutiny v nekonzervatívnom tvare. Rozpísaný tvar tejto rovnice je

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} - \frac{\partial(w\rho)}{\partial z} \\ & + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z} + \rho(f_x u + f_y v + f_z w) \end{aligned} \quad (65)$$

Konzervatívny tvar rovnice energie (v Eulerových súradniciach) dostaneme po úprave ľavej strany rovnice (65) rovnakým postupom, ako upravovali ľavú stranu nekonzervatívnej rovnice hybnosti (40). Stačí nahradiť veličinu u veličinou E . Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} - \frac{\partial(w\rho)}{\partial z} \\ & + \frac{\partial(u\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\sigma_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} \\ & + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\sigma_{zz})}{\partial z} + \rho(f_x u + f_y v + f_z w) \end{aligned} \quad (66)$$

Zložky napätia možno z tejto rovnice vylúčiť pomocou konštitutívnych rovníc (54). Poznamenávame, že pri niektorých fluidných úlohách (napr. so skupenskými premenami, s chemickou reakciou) sa môžeme stretnúť aj s formálne iným tvarom tejto rovnice, pri ktorom je vnútorná energia vyjadrená pomocou entalpie systému.

Poznámka k základným rovniciam prúdenia viskózne tekutiny

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali základnými rovnicami platnými pre prúdenie viskózných tekutín, pričom sme sa sústredili hlavne na ich diferenciálny konzervatívny tvar. Všetky základné diferenciálne rovnice možno vyjadriť aj v konzervatívnom *integrálnom* tvare, ktorý sa využíva napr. pri numerickej metóde konečných objemov. V rovniciach sa objavuje celkovo sedem neznámych: tri zložky rýchlosti u, v, w , tlak p , hustota ρ , teplota T a merná vnútorná energia e . Sú to všetko funkcie polohy x_i a času t . Pretože máme k dispozícii len päť rovníc, a to rovnicu kontinuity (26), tri Navier-Stokesove pohybové rovnice (42) a energetickú rovnicu (66), dopĺňajú sa o dve stavové rovnice. Napr. v aerodynamike sa často využíva stavová rovnica ideálneho plynu

$$p = \rho RT \quad (67)$$

kde R je špecifická plynová konštanta. Poslednou potrebnou rovnicou býva termodynamický vzťah medzi stavovými premennými, napr. vzťah vyjadrujúci vnútornú energiu, ktorého najjednoduchší tvar pre termodynamicky a kaloricky ideálny plyn je

$$e = c_v T \quad (68)$$

kde c_v je merné teplo pri konštantnom objeme.

Sústava obsahuje nelineárne parciálne diferenciálne rovnice, ktorých riešenie je možné len pomocou počítačovo orientovaných numerických metód, ktorým sa venuje vedný odbor Výpočtová dynamika tekutín (Computational Fluid Dynamics - CFD). Analytické riešenia sú známe len pre niektoré elementárne, silne idealizované úlohy. Význam poznania fyzikálneho princípu základných rovníc spočíva však v tom, že celá, a to nielen teoretická, ale i numericko-výpočtová dynamika tekutín je budovaná na týchto rovniciach a ťažko si predstaviť užívateľa softvérových nástrojov CFD, ktorý by nepoznal fyzikálnu podstatu týchto rovníc.

Začiatkové a okrajové podmienky

Riešenie sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc prúdenia je možné len po predpísaní *okrajových podmienok* vystihujúcich dostatočne presne pomery na okraji analyzovanej oblasti (na okraji kontrolného objemu). V prípade nestacionárnej úlohy je potrebné tiež predpísať začiatkové hodnoty hľadaných primárnych neznámych (zložky rýchlosti, tlak, teplota a i.) pre začiatkový čas riešenia úlohy vo forme *začiatkových podmienok*.

Všeobecne môžeme časovo nezávislé okrajové podmienky pre diferenciálne rovnice prúdenia zaradiť do kategórie Dirichletových okrajových podmienok, ktoré majú tvar

$$\phi(\mathbf{x}_{okraj}) = a$$

kde ϕ sú hodnoty niektorej hľadanej neznámej (napr. tlaku, zložky rýchlosti a i.) na okraji vyšetrovanej oblasti, udané známou konštantou (výnimočne funkciou) a . Ďalej sa možno stretnúť s Neumannovým typom okrajovej podmienky napr.

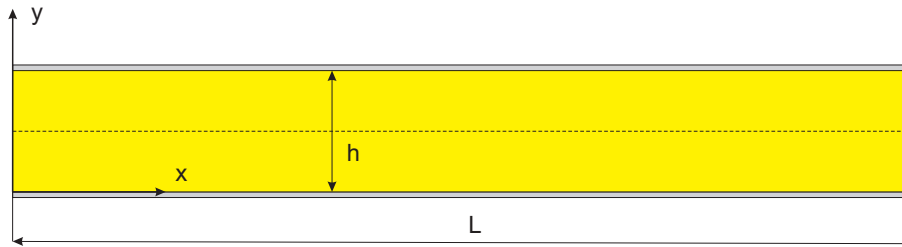
$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_{okraj})}{\partial y} = b$$

a so zmiešaným typom týchto dvoch okrajových podmienok.

Pravda, pri riešení zložitejších úloh prúdenia pomocou komerčných programov CFD sa stretneme s uvedenými okrajovými podmienkami v užívateľsky názornejšom fyzikálnom tvare. Znamená to, že sa na určitej časti okraja vyšetrovanej oblasti predpíšu napr. podmienky vtoku alebo výtoku tekutiny, a to zadaním rýchlosti (tlaku, hmotnostného toku, teploty a i.) tekutiny, ďalej možno simulovať podmienky pre vstupný a výstupný ventil, ventilátor, ohrev resp. chladenie a pod. Ďalej sa jednoducho predpisujú rýchlostné a termálne podmienky pre stenu, pre os alebo plochu symetrie, pre periodicky sa opakujúce oblasti a množstvo ďalších.

Príklad 2

Vo vzduchovode s pozdĺžnym rezom na obrázku určte maximálnu rýchlosť ustáleného prúdenia vzduchu analyticky a pomocou programu AnsysFlotran, keď je dané: $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $h = 8 \text{ cm}$. Dĺžku kontrolného objemu L volíme 1 meter. Tlakový spád vo vzduchovode je $\Delta p / \Delta x = -0,01 \text{ Pa/m}$.



Analytické riešenie

Úlohu možno považovať za dvojrozmernú a podľa príkladu 1 pre maximálnu rýchlosť prúdenia platí (predpokladáme laminárne prúdenie)

$$u_{\max} = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{0,08^2}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} \left(-\frac{0,01}{1} \right) = 0,4 \text{ m/s}$$

Pre Reynoldsovo číslo dostávame

$$\text{Re} = \frac{\rho u h}{\mu} = \frac{1,2 \cdot 0,4 \cdot 0,08}{0,00002} = 1920$$

Z tejto hodnoty vyplýva, že podmienka pre laminárne prúdenie je splnená (prechod k turbulentnému prúdeniu nastáva pri $\text{Re} \approx 2300$).

Numerické riešenie

Úlohu sme v interaktívnom móde programu zadali a vypočítali týmto postupom:

1. Zadanie názvu úlohy

Utility Menu>File>Change Jobname..., /FILNAM = Příklad 2, OK;

2. Main Menu>Preferences, FLOTRAN CFD, OK;

3. Zadanie typu prvku pre úlohu

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete>Add, 2D Flotran 141, OK, Close;

4. Vytvorenie plochy pozdĺžneho rezu (vzhľadom na symetriu, uvažujeme len jej hornú polovicu)

Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensionns, X1=0, X2=1, Y1=0, Y2=0.04, OK;

5. Zadanie hustoty a vytvorenie výpočtovej siete

Meshing>Size Cntrls>Manual Size>Lines>Picked Lines, Kliknite vodorovné čiary obdĺžnika, OK, NDIV=30, Apply, Kliknite zvislé čiary, OK, NDIV=20, OK;

Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided, Pick All;

6. Okrajové podmienky pre zložky rýchlosti (zohľadňujú aj symetriu oblasti)

Solution>Define Loads>Apply>Fluid/CFD>Velocity>On Lines, Kliknite spodnú vodorovnú čiaru, OK, VY=0, OK, On Lines, Kliknite hornú vodorovnú čiaru, OK, VX=0, VY=0, OK;

7. Okrajové podmienky pre statický tlak (zadáva sa a počíta tlak prevyšujúci referenčný atmosferický tlak 101350 Pa)

Apply>Pressure DOF>On Lines, Kliknite ľavú zvislú čiaru, OK, PRES=0.01, Apply, Kliknite pravú zvislú čiaru, OK, PRES=0, OK;

8. Zadanie cieľových hodnôt pre iteráciu (pre VY zadáme vysokú presnosť, aby sme ilustrovali konvergenciu k analytickému riešeniu)

FLOTRAN Set Up>Execution Cntrls, EXEC=2000, VX=1E-6, PRES=0.01, OK;

9. Zadanie vlastností tekutiny, uloženie databázy modelu a výpočet

Fluid Properties>Density=Gas, Viscosity=Gas, OK, D0=1.2, V0=2E-5, OK;

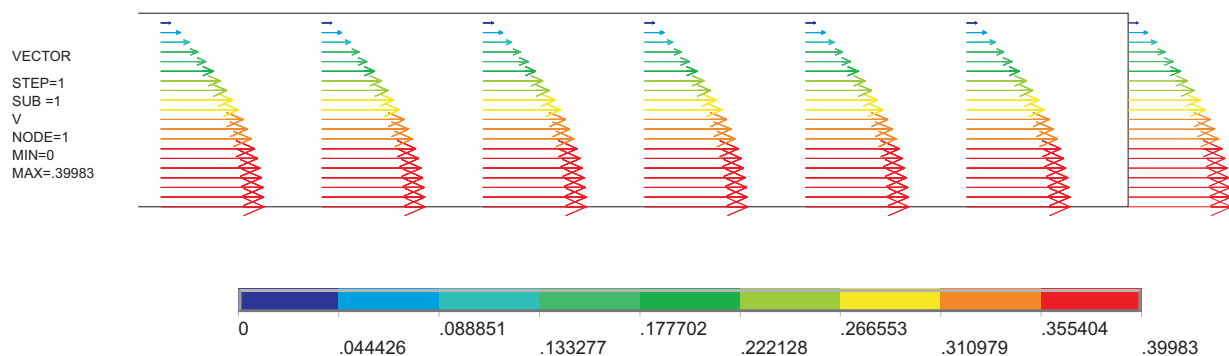
SAVE_DB;

Run FLOTRAN;

10. Vektorové znázornenie rýchlosti s výpisom maximálnej rýchlosti prúdenia vo vybranej oblasti

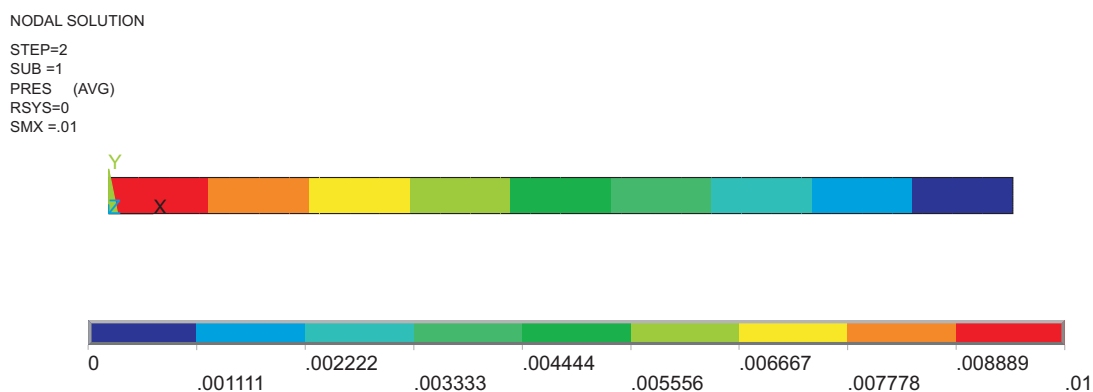
General Postproc>Read Results>Last Set;

Plot Results>Vector Plot>Predefined, OK, Kliknite ikonku Zoom Model a zväčšite vybrané miesto;



11. Znázornenie tlaku

Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu>DOF Solution, Pressure, OK;



12. Ukončenie práce s uložením databázy úlohy

Ansys Toolbar>Quit>Save Geom+Loads, OK;

Poznámka k príkladu

Príklad má aj pri numerickom výpočte teoretický charakter, pretože zadanie *statického* tlaku na oboch stranách kontrolnej oblasti vyvolalo parabolický priebeh rýchlosti aj na vstupe do oblasti, čo pri reálnom vstupe je ťažko možné. Je to len určitý myslený výrez z reálnej oblasti v úseku, kde tlakový spád je konštantný. V programoch (napr. AnsysFluent) kde sa zadávajú fyzikálne okrajové podmienky (v tomto prípade vtok s udaným tlakom), by sa na vstupe zadával celkový tlak (statický plus dynamický) a pri vstupnom *celkovom* tlaku 0,01 Pa by sme dostali kvantitatívne, a v okolí vstupu tekutiny i kvalitatívne, rozdielne výsledky.

Literatúra

[Lit1] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2005