## D11. Von Misesov materiálový model s izotropným spevňovaním

Kritérium plasticity

Podľa hypotézy von Misesa začiatok plastickej deformácie signalizuje situácia, kedy druhý (kvadratický) invariant deviátora napätia $J_2$ dosiahne kritickú hodnotu, alebo, inak povedané, keď jeho odmocnina dosiahne hodnotu kritického napätia $K$

$$\sqrt{J_2} = K \tag{1}$$

Potom kritérium plasticity bude mať tvar

$$f(\boldsymbol{\sigma}, K) = \sqrt{J_2} - K = 0 \tag{2}$$

Aby kritérium platilo aj pre jednoosovú napätosť musí byť splnená podmienka [D10]

$$|\sigma| - \bar{\sigma}_K = 0 \qquad \rightarrow \qquad |\sigma| = \bar{\sigma}_K \tag{3}$$

a pretože pri jednoosovej napätosti je $J_2 = \frac{1}{3}\sigma^2$ a teda $\sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_k$, podľa (2) pre $K$ platí

$$K = \frac{\bar{\sigma}_K}{\sqrt{3}}$$

čo je vlastne medza sklzu materiálu v šmyku podľa tejto podmienky. S použitím všeobecného vzťahu pre $J_2$ [D10]

$$J_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}}$$

dostávame potom podľa (2) von Misesovu podmienku plasticity v tvare

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}_K) = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}} - \bar{\sigma}_K = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_K = 0 \tag{4}$$

Člen s odmocninou v tomto vzťahu sa nazýva *von Misesovo ekvivalentné napätie* $\bar{\sigma}$. Jeho názov hovorí, že viaczložkové napätie $\boldsymbol{\sigma}$, ktorého deviátor je $\mathbf{s}$, možno podľa von Misesovej hypotézy ekvivalentne nahradiť jednoosovým napätím $\bar{\sigma}$ a takto jeho účinok porovnávať s jednoosovými charakteristikami materiálu. Možno sa stretnúť aj s názvom *redukované*, resp. *porovnávacie* von Misesovo napätie. Aktuálna medza sklzu v (4) vystupuje ako skalárna vnútorná premenná riadiaca proces spevňovania materiálu. Po vyjadrení ekvivalentného von Misesovho napätia pomocou zložiek napätia dostávame

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}} &= \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{23}^2 + 3\sigma_{31}^2} \\ &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2}\end{aligned} \tag{5}$$

alebo, pomocou hlavných napätí

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \tag{6}$$

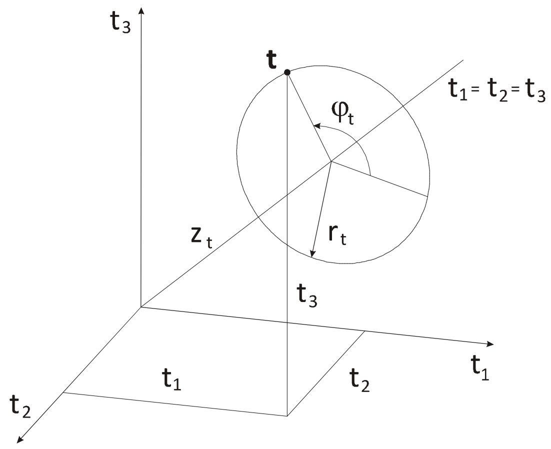
Fyzikálne sa von Misesova podmienka plasticity vysvetľuje dvomi spôsobmi. Hencky (v r. 1924) ukázal, že tú istú podmienku dostaneme z porovnania energie šmykových zložiek napätia (energie spôsobujúcej len zmenu tvaru) priestorovej a jednoosovej napätosti. Nádaj (v r. 1937) zaviedol tzv. oktaedrické napätia (napätia pôsobiace na stenách pravidelného elementárneho osemstena – oktaédra, ktorého steny sú rovnako sklonené vzhľadom na smery hlavných napätí) a nakoľko pre šmykové oktaedrické napätie platí

$$\tau_{okt} = \sqrt{\tfrac{2}{3}J_2}$$

interpretoval von Misesovu podmienku tak, že plastická deformácia začína vtedy, keď šmykové oktaedrické napätie dosiahne kritickú hodnotu.

Von Misesova podmienka vystihuje experimentálne zistený jav, že plastická deformácia kovov skoro vôbec nie je závislá od hydrostatického (všestranného) tlaku. Pretože všestranný tlak $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ nevyvolá žiadne šmykové napätia (nevyvolá zmenu pravých uhlov elementu), z Henckyho zistenia vyplýva, že neovplyvní ani von Misesovu podmienku plasticity. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že pri zmene normálových zložiek napätia o rovnakú hodnotu, sa $J_2$ nezmení. Pravda táto vlastnosť tohoto invariantu, a teda i von Misesovej podmienky, je už menej vítaná pri všestrannom ťahu. Možnosť výskytu „čistého“ všestranného priestorového ťahu je však v praxi málo pravdepodobná.

Pre grafické znázornenie von Misesovej podmienky plasticity je výhodný systém cylindrických súradníc ($r$, $\varphi$, $z$). Tieto súradnice *symetrického* tenzora $\mathbf{t}$ možno zaviesť v trojrozmernom priestore jeho hlavných hodnôt $t_1$, $t_2$, $t_3$. V tomto priestore sa cylindrické súradnice definujú takto (obr. 1): Osou $z$ systému je priamka odklonená o rovnaký uhol od pravouhlých osí, $t_1$, $t_2$, $t_3$, to znamená, že pre tieto body platí $t_1 = t_2 = t_3$. Na tejto osi meriame vzdialenosť $z_t$. V rovine kolmej k osi $z$ meriame polomer $r_t$ ako aj uhol $\varphi_t$ od roviny prechádzajúcej cez os $z$ a súradnicovú os $t_1$.




Obr. 1 *Cylindrické súradnice tenzora* $\mathbf{t}$

Cylindrické súradnice tenzora $\mathbf{t}$ v priestore jeho hlavných hodnôt sú jeho invarianty a ich hodnoty sú [Lit1]

$$z_t = \sqrt{1/3}\left(t_1 + t_2 + t_3\right)$$

$$r_t = \sqrt{2/3}\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_1 t_2 - t_2 t_3 - t_3 t_1} \tag{7}$$

$$\varphi_t = \arcsin\frac{t_1 - t_2}{\sqrt{2}\, r_t}$$

Podmienku (4) spĺňa v priestore hlavných napätí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ množina napäťových bodov ležiacich na kvadratickej ploche. Pri ich znázornení je výhodný uvedený valcový súradnicový systém. Z porovnania vzťahu (6) a (7) vyplýva, že von Misesovu podmienku spĺňajú len body, ktoré ležia na *plášti valca* s polomerom

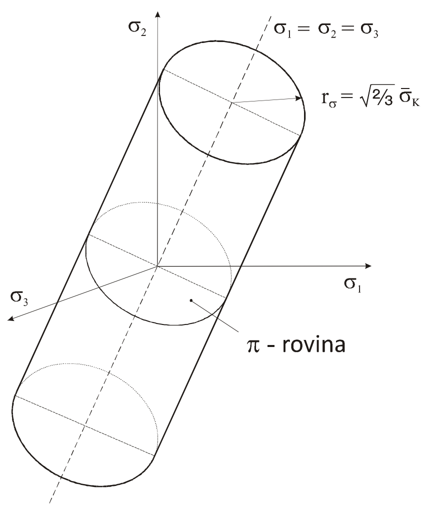
$$r_\sigma = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \bar{\sigma}_K \tag{8}$$

Os valca je totožná alebo rovnobežná (pri kinematickom spevňovaní) s osou cylindrického systému, odklonenej o rovnaký uhol od pravouhlých súradnicových osí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (nazývaná tiež hydrostatickou osou, alebo priestorovou diagonálou - obr. 2), na ktorej $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Rovina kolmá na os valca prechádzajúca cez začiatok súradnicového systému sa nazýva $\pi$ -rovina.

Všetky stavy napätia vo vnútri valca sú pružné stavy. Body na plášti predstavujú kritické stavy - na hranici pružnej a plastickej deformácie; každá ďalšia zmena napätosti, ktorá by smerovala von z valca, vyvolá plastické deformácie. Nekonečná dĺžka valca je dôsledkom nezávislosti von Misesovho kritéria na všestrannom tlaku a ťahu: Bod takejto napätosti sa nachádza vždy na osi valca a nemôže dosiahnuť kritickú hodnotu.

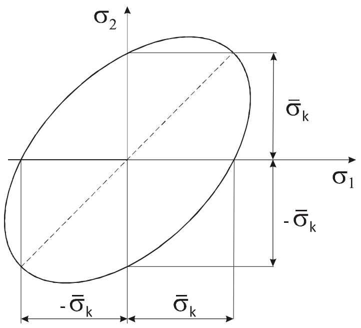
Pre rovinnú napätosť ( $\sigma_3 = 0$ ) zo (6) dostávame

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \bar{\sigma}_K^2$$




Obr. 2 *Grafické zobrazenie von Misesovej podmienky plasticity*

Obrazom tejto podmienky je v súradnicovom systéme $\sigma_1, \sigma_2$ elipsa (obr. 3), ktorej hlavná os je natočená o 45° od osi $\sigma_1$. Je to rez rovinou $\sigma_3 = 0$ cez valcový plášť na obr. 2.




Obr. 3 *Von Misesovo kritérium plasticity pri rovinnej napätosti*

Niekedy je výhodné pracovať s podmienkou plasticity v súradnicovom systéme hlavných deviatorických napätí $s_1, s_2, s_3$. Pre hlavné deviatorické napätia platí

$$s_i = \sigma_i - \sigma_m\,; \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

a ľahko sa možno pomocou (6) a (4) presvedčiť, že von Misesova podmienka vyjadrená pomocou týchto hodnôt má tvar

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_3 s_1} = \bar{\sigma}_K \tag{9}$$

Keď porovnáme tento vzťah so (7), vidíme, že napätia spĺňajúce von Misesovu podmienku majú v súradnicovom systéme $s_1, s_2, s_3$ takisto polomer

$$r_s = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\bar{\sigma}_K$$

ale všetky ležia *na kružnici* v *deviatorickej rovine* (tzv. $\pi$ *-rovine*, obr. 2), pretože podľa (7) vzdialenosť

$$z_s = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(s_1 + s_2 + s_3\right) \tag{10}$$

pre všetky stavy napätia je rovná nule, pretože $s_1 + s_2 + s_3 = 0$.

Von Misesovo kritérium plasticity (spolu s ďalšími klasickými podmienkami: Tresca, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb - pozri napr. [2]) sa vyznačuje vlastnosťou izotropie, t.j. vyhovuje podmienke

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T) \tag{11}$$

kde $\mathbf{R}$ je tenzor rotácie. Podmienka sa teda nemení pri rotácii napätosti (rotácii súradnicového systému) a vyhovuje pre izotropné (hlavne kovové) materiály.

*Zákon plastického tečenia*

Určenie podmienky pre začiatok plastickej deformácie materiálu je len prvý krok riešenia pružne-plastickej úlohy. Je potrebné odpovedať na ďalšie zásadné otázky: Ak v bode telesa všeobecná napätosť dosiahne podmienku plasticity a naďalej narastá, aké veľké budú a aký budú mať smer zložky prírastku tenzora plastickej deformácie $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt$ ? Pretože v bode skončila lineárna závislosť medzi zložkami deformácie a napätia, ako teraz určíme prírastky zložiek napätia?

Na prvú otázku odpovedá *zákon plastického tečenia* materiálu a na druhú *konštitutívne (fyzikálne) rovnice*, čo sú vlastne prírastkové vzťahy medzi zložkami celkovej deformácie a zložkami napätia v uvažovanom bode pre príslušný materiálový model. Konštitutívne rovnice musia dostatočne presne zohľadňovať fyzikálne vlastnosti materiálu: Jeho vlastnosti v pružnom a pružne plastickom stave, jeho spevňovanie, vývoj a prípadnú zmenu podmienky plasticity a i.

Zákon plastického tečenia je v podstate zovšeobecnenie toto zákona pre jednoosové zaťažovanie [D11] a vyjadruje prírastok plastickej deformácie v situácii, kedy napätosť v bode telesa splnila kritérium plasticity a zaťaženie ďalej narastá. Experimentálne merania potvrdzujú, že pre kovové materiály má vektor diferenciálneho prírastku plastickej deformácie *smer normály k ploche plasticity* (pravidlo normality) určenej gradientom jej funkcie. Potom platí

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\mathbf{f} \tag{12}$$

Ak v tomto vzťahu využijeme von Misesovu funkciu plasticity (4) dostaneme zákon plastického tečenia v tvare (o platnosti výsledného tvaru sa možno presvedčiť rozpísaním (4) až po zložky $\boldsymbol{\sigma}$ a precvičením si derivovania zloženej funkcie podľa jednotlivých zložiek napätia)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\mathbf{f} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \dot{\lambda}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}}} = \dot{\lambda}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\tfrac{2}{3}}\overline{\sigma}_k} = \dot{\lambda}\frac{3}{2\overline{\sigma}_k}\mathbf{s} \tag{13}$$

Je to vlastne v pseudorýchlostnom tvare tenzorový zápis Prandtl-Reussových rovníc

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{s_z} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}} = d\lambda_0 \tag{14}$$

V tejto súvislosti upozorňujeme na to, že ak v (13) uplatníme modifikovaný ale ekvivalentný tvar von Misesovej podmienky plasticity (4), napr.

$$f_0 = \tfrac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s} - \overline{\sigma}_k^2 = 0 \tag{15}$$

dostaneme

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_0\mathbf{s} \tag{16}$$

Zatiaľ neznáma hodnota skaláru $\dot{\lambda}_0$ v tomto prípade "absorbovala" konštantu $3/(2\overline{\sigma}_k)$. Po určení týchto konštánt úmernosti, bude samozrejme v oboch prípadoch vzťah medzi zložkami napätia a zložkami plastickej deformácie rovnaký.

*Spevňovanie materiálu*

O tom, že sa kovový materiál spevňuje, ak ho podrobíme plastickej deformácii, nás presviedča prax a potvrdzujú to experimenty, napr. ťahová skúška materiálu. Ťahovou skúškou, pri ktorej sa vzorka materiálu zaťažuje za medzu sklzu, možno určiť začiatočnú medzu sklzu materiálu $\sigma_k$, a jednoosový tangenciálny modul $E_T(\varepsilon^p)$ ako základné jednoosové charakteristiky, potrebné pre výpočtovú aproximáciu (simuláciu) spevňovania pri všeobecnom zaťažovaní.

Pri niektorých úlohách sa využíva aj *model ideálne plastického materiálu* bez spevnenia s konštantnou medzou sklzu $\sigma_k$ v podmienke plasticity. Tento predpoklad je tiež známy z výpočtov na medzný stav a uplatňuje sa aj v tzv. koeficientoch bezpečnosti pri jednoduchých pevnostných výpočtoch podľa technických noriem. V takomto prípade sa plastické moduly $E_T$ a $H$ [D10] rovnajú nule a konštantná medza sklzu má za následok nemennú plochu plasticity pri akýchkoľvek deformačných procesoch. Pokiaľ napätie dosiahne medzu sklzu a ďalej narastá, neobmedzenej deformácii zabraňuje len tuhosť okolitého materiálu alebo tuhosť okolitých častí konštrukcie.

Jednoduchú formu simulácie spevňovania materiálu účinkom plastickej deformácie predstavuje tzv. *izotropné spevňovanie*, pri ktorom sa materiál spevňuje vo všetkých napäťových smeroch rovnako. V takomto prípade sa vo von Misesovej podmienke plasticity uvažuje premenlivá medza sklzu $\overline{\sigma}_k$ . Jej hodnota monotónne narastá v závislosti od miery plastickej deformácie v danom bode telesa, ktorou najčastejšie býva ekvivalentná plastická deformácia $\overline{\varepsilon}^p$ alebo disipovaná práca plastickej deformácie $A^p$ . Tieto miery umožňujú tiež určitým približným spôsobom vniesť do výpočtu všeobecnej viacosovej napätosti jednoosové spevňovacie vlastnosti materiálu určené klasickými normovými skúškami.

Ekvivalentná plastická deformácie má analogickú funkciu ako evivalentné napätie - redukuje viacosový deformačný stav určený tenzorom plastickej deformácie na jednoosový podľa vzťahu

$$\overline{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\overline{\varepsilon}}^p dt \tag{17}$$

kde

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^p = \sqrt{\tfrac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \tag{18}$$

Je to opäť invariantná skalárna veličina, pričom násobok $2/3$ zaručuje, že $\overline{\varepsilon}^p = \varepsilon_{11}^p$, čiže platnosť (17) aj pre jednoosovú deformáciu. Izotropné spevňovanie von Misesovho materiálového modelu dostaneme, keď medza sklzu v (4) bude funkciou ekvivalentnej plastickej deformácie

$$f(\boldsymbol{\sigma},\overline{\sigma}_k) = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s}} - \overline{\sigma}_k(\overline{\varepsilon}^p) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{s}:\mathbf{s} = \tfrac{2}{3}\overline{\sigma}_k^2 \tag{19}$$

Ak funkcia $\overline{\sigma}_K(\overline{\varepsilon}^p)$ je lineárna, hovoríme o modeli s *lineárnym izotropným spevňovaním*. Spevňovacia funkcia vtedy má tvar

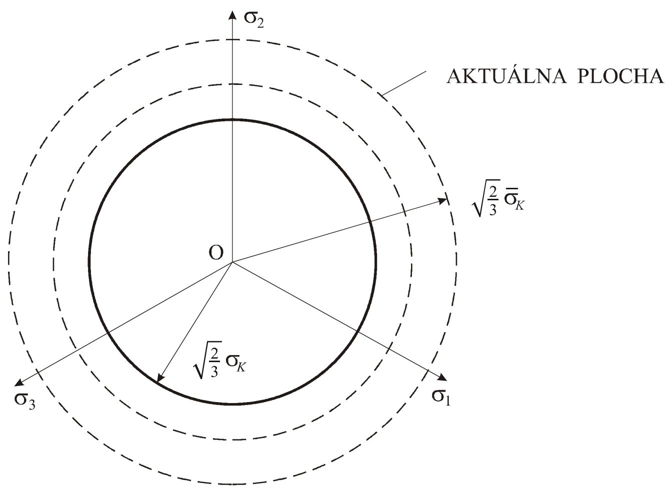
$$\overline{\sigma}_K(\overline{\varepsilon}^p) = \sigma_K + H\overline{\varepsilon}^p \tag{20}$$

s konštantým plastickým modulom $H$ a konštatntnou začiatočnou medzou sklzu nedeformovaného materiálu.

V prípade von Misesovej podmienky plasticity (von Misesovej funkcie plastického zaťažovania) vzťah (19) s meniacou sa medzou sklzu $\overline{\sigma}_K$ zobrazuje v súradnicovom systéme hlavných napätí jednoparametrickú množinu súosových valcov (obr. 4) s polomermi

$$r(\overline{\sigma}_K) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\overline{\sigma}_K = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\sigma_K + H\overline{\varepsilon}_p\right)$$

Izotropné spevňovanie možno hodnoverne využiť len pri tzv. *proporcionálnom zaťažovaní* (všetky zložky napätia narastajú proporcionálne). Pri inom zaťažovaní - neproporcionálnom alebo cyklickom - je použitie tohoto modelu nevhodné a vzhľadom na nereálny (obrátený) Bauschingerov efekt môže viesť k neprípustným chybám.




Obr. 4 *Zmena plochy plasticity pri izotropnom sevňovaní*

Dosadením (13) do (18) a s využitím von Misesovej podmienky plasticity v tvare (19) zistíme, že platí

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\varepsilon}}^p \tag{21}$$

Pre niektoré (nekovové) materiály je výhodnejšie použiť model, kde spevňovanie materiálu je riadené akumulovanou prácou vnútorných plastických síl (*work hardening)*

$$A_p = \int dA_p = \int \underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon}_p = \int d\lambda \underline{\sigma}^T \underline{\mathbf{f}}$$

Podmienka plasticity potom je

$$f = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_K\left(A_p\right) = 0$$

Tento postup *pre von Misesovu podmienku plasticity* dáva rovnaké výsledky ako uvedená formulácia modelu s deformačným spevňovaním (*strain hardening*).

<u>*Prírastkové diferenciálne konštitutívne rovnice a pružne plastický materiálový modul*</u>

V doplnku D10 sme uviedli prírastkové diferenciálne konštitutívne rovnice materiálového modelu (vzťahy medzi deformáciou a napätím) vo *všeobecnom* tvare

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{22}$$

kde

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e : \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{D}^e : \mathbf{f})}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \mathbf{f} - (\partial f / \partial \mathbf{a}) * \rho(\partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2) * \mathbf{h}} \tag{23}$$

je *diferenciálny* pružne plastický (tangenciálny) materiálový modul. Rovnice (22) umožňujú pri pružne plastickom zaťažovaní z diferenciálneho prírastku celkovej deformácie vypočítať diferenciálny prírastok napätia. Skonkretizujme teraz modul $\mathbf{D}^{ep}$ pre von Misesov materiálový model s lineárnym izotropným deformačným spevňovaním. Zo vzťahov termodynamickej formulácie spevňovania [D10] dostávame:

Máme len jednu vnútornú premennú

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\bar{\varepsilon}^p\}$$

jedinú termodynamickú silu

$$\mathbf{a} = \left\{ \rho \frac{\partial \psi^p}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \right\} = \bar{\sigma}_k(\bar{\varepsilon}^p)$$

a pre zobecnený spevňovací modul dostávame

$$\mathbf{h} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_k} = 1$$

Takže platí

$$\rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} = \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \bar{\varepsilon}^{p^2}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_k}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = H$$

a materiálový modul (23) je

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e : \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{D}^e : \mathbf{f})}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \mathbf{f} + H} \tag{24}$$

Tento zápis sa dá ďalej zjednodušiť, keď vyjdeme z tenzorového vyjadrenia elastického materiálového modulu rozdeleného na deviatorickú a objemovú časť

$$\mathbf{D}^e = 2G\,\mathbb{P}_\mathrm{d} + K\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \tag{25}$$

kde

$$\mathbb{P}_\mathrm{d} = \mathbb{I} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}$$

je deviatorický projekčný tenzor 4. rádu (transformuje tenzor druhého rádu na jeho deviatorickú časť), $\mathbb{I}$ a $\boldsymbol{I}$ sú tenzory identity štvrtého a druhého rádu, G je modul pružnosti v šmyku a *K* je objemový modul materiálu. Pretože $\mathbf{f}$ je deviatorický tenzor, dostávame

$$\mathbf{D}^e : \mathbf{f} = 2G\mathbf{f} \tag{26}$$

a s využitím (13)

$$\mathbf{f}:\mathbf{D}^e:\mathbf{f} = 2G\,\mathbf{f}:\mathbf{f} = 2G\frac{3}{2\overline{\sigma}_k}\mathbf{s}:\mathbf{s}\frac{3}{2\overline{\sigma}_k} = 2G\frac{3}{2\overline{\sigma}_k}\frac{2}{3}\overline{\sigma}_k^2\frac{3}{2\overline{\sigma}_k} = 3G \tag{27}$$

Po dosadení (26) a (27) do (24) sa pružne plastický modul zjednoduší na

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{9G^2}{\overline{\sigma}_k^2(3G+H)}\mathbf{s}\otimes\mathbf{s} \tag{28}$$

Sústava konštitutívnych rovníc (22) s pružne plastickým materiálovým modelom (28) môže byť v niektorých špeciálnych prípadoch východiskom pre numerické určovanie prírastku napätia v integračných bodoch siete konečných prvkov výpočtového modelu telesa pomocou explicitných metód. Pri implicitných (iteračných) metódach integrácie týchto rovníc, a najmä pri veľkých zaťažovacích krokoch (s veľkým $\Delta\lambda$ ), ich použitie vedie k dramatickému poklesu konvergencie globálnej iteračnej procedúry, a preto sa nahradzujú rovnicami s tzv. *konzistentným pružne plastickým materiálovým modulom* (myslí sa tým konzistencia s príslušnou integračnou procedúrou).

*Poznámka*

Podrobný opis von Misesovho materiálového modelu s *kinematickým spevňovaním*, ako aj odvodenie pružne plastického materiálového modulu v maticovom zápise pre tento prípad spevňovania, možno nájsť v [2], resp. na titulnej stránke tejto webovej domény v časti *Nelineárne pevnostné problémy* pod názvom *Klasické modely pružne plastickej deformácie materiálu.*

**Literatúra**

[Lit1] Zyczkowski M.: Combined Loadings in the Theory of Plasticity. PWN, Warszawa, 1981

[2] Benča Š.: Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2009