D10 PRUŽNE-PLASTICKÉ ÚLOHY S MALÝMI DEFORMÁCIAMI

1. Jednoosový konštitutívny model materiálu

Výpočty v teórii plasticity vychádzajú z experimentálne získaných mechanických charakteristík materiálu. Pri *kovových* materiáloch sa často využíva ťahová skúška normalizovanej tyče, z ktorej možno získať závislosť jednoosového napätia

$$\sigma = F/S_0$$

od pomerného predĺženia (jednoosovej deformácie)

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Pretože uvažujeme len oblasť malých deformácií možno v uvedených vzťahoch využívať začiatočné hodnoty dĺžky i plochy a inžiniersku mierku deformácie. Pri numerických aplikáciách sa bežne predpokladá, že medza úmernosti (linearity), medza pružnosti a začiatočná medza sklzu materiálu σ_K sú totožné (obr. 10.1). Zaťažovanie takého prúta v úseku *OK* je pružné a lineárne, platí Hookeov zákon

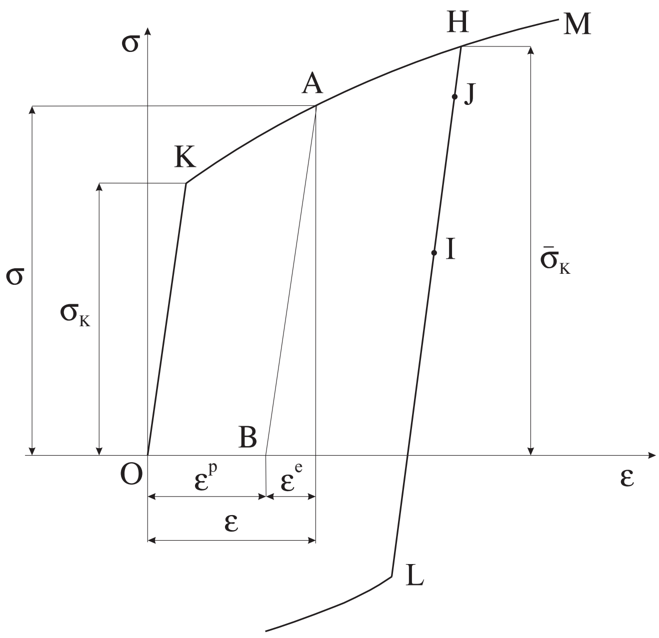
$$d\sigma = E\,d\varepsilon \tag{1}$$

s konštantným modulom pružnosti *E*. Ak prút zaťažíme tak, že napätie prekročí medzu sklzu materiálu, závislosť σ - ε sa stáva nelineárnou a hovoríme o *pružne-plastickom* zaťažovaní. V úseku *KM* možno závislosť prírastku napätia od prírastku deformácie opäť vyjadriť analogickým vzťahom s (1)

$$d\sigma = E_T(\varepsilon^p)\,d\varepsilon \tag{2}$$

tu už ale $E_T(\varepsilon^p)$ je premenná veličina, vyjadrená tangensom dotyčnice ku krivke *KM* v danom mieste, s názvom jednoosový pružne-plastický *tangenciálny modul* materiálu; je funkciou plastickej časti deformácie ε^p a zavádza sa takto predpoklad, že celkovú deformáciu možno rozdeliť na elastickú a plastickú časť, pričom platí

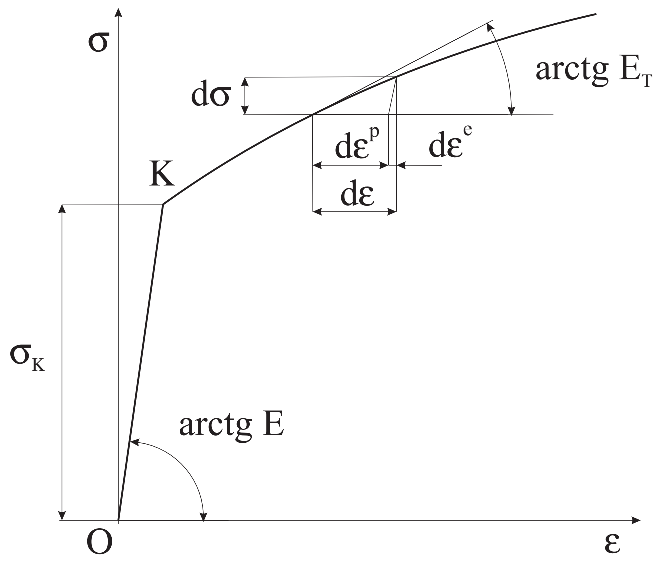
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{3}$$



Obr. 10.1 *Zidealizovaný jednoosový ťah kovového materiálu*

Ak prút napr. v bode *A* odľahčíme, zostane v ňom trvalá deformácia ε^p. Pri odľahčení pružná deformácia vymizne lineárne (v závislosti od modulu pružnosti *E*), a preto odľahčovacia úsečka *AB* je rovnobežná s lineárnym zaťažovacím úsekom *OK*. Pri odľahčení prúta z bodu *H* do bodu *I* a opätovnom ťahovom zaťažení sa zistilo, že nelineárna závislosť sa objaví až od bodu *J*, t. j. po plastickej deformácii došlo k zvýšeniu medze sklzu materiálu (porovnajte bod *J* s bodom *K*). Existuje teda rozdiel medzi *začiatočnou medzou sklzu materiálu* σ_K a *aktuálnou medzou sklzu* $\overline{\sigma}_K$. Pri numerickej simulácii sa obyčajne rozdiel medzi bodom *J* a *H* zanedbáva a za $\overline{\sigma}_K$ sa považuje hodnota na krivke *KM*. Ak by sme po odľahčení z bodu *H* pokračovali zaťažením na tlak, zaznamenáme medzu sklzu v bode *L*. Pri materiáloch, ktoré v absolútnej hodnote majú rovnakú *začiatočnú* medzu sklzu v ťahu i tlaku, sa táto rovnosť porušuje. Tento dôsledok predchádzajúcej plastickej deformácie materiálu sa nazýva *Bauschingerov efekt.* Idealizovaná krivka materiálu na obr. 10.1 platí pre materiál vo východzom (plasticky ešte nedeformovanom) stave, pri opakovanom, napr. cyklickom zaťažovaní za aktuálnu medzu sklzu sa musia zohľadňovať aj ďalšie vlastnosti materiálu.

Uvažujme teraz veľmi malý prírastok deformácie v nelineárnej časti krivky σ - ε (obr. 10.2). Dostávame



Obr. 10.2 *Matematický model jednoosového materiálu so spevnením*

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \tag{4}$$

Pre pružnú časť deformácie platí Hookeov zákon

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} \tag{5}$$

a pre plastický prírastok sa analogicky zavádza

$$d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{H} \tag{6}$$

kde

$$H(\varepsilon^p) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \tag{7}$$

sa nazýva *plastický (spevňovací) modul* materiálu. Je to tangens uhla dotyčnice v diagrame σ - ε^p, v elastickej oblasti je nekonečne veľký s dôsledkom $d\varepsilon^p = 0$.

Celkový prírastok deformácie v oblasti pružne-plastického zaťažovania prúta môžeme teda vyjadriť aj v tvare

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H}\right) d\sigma$$

Ďalej podľa obr. 10.2 a vzťahov (2), (5), (6) platí

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e + d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{\dfrac{d\sigma}{E} + \dfrac{d\sigma}{H}} = \frac{1}{\dfrac{1}{E} + \dfrac{1}{H}} \tag{8}$$

a z toho

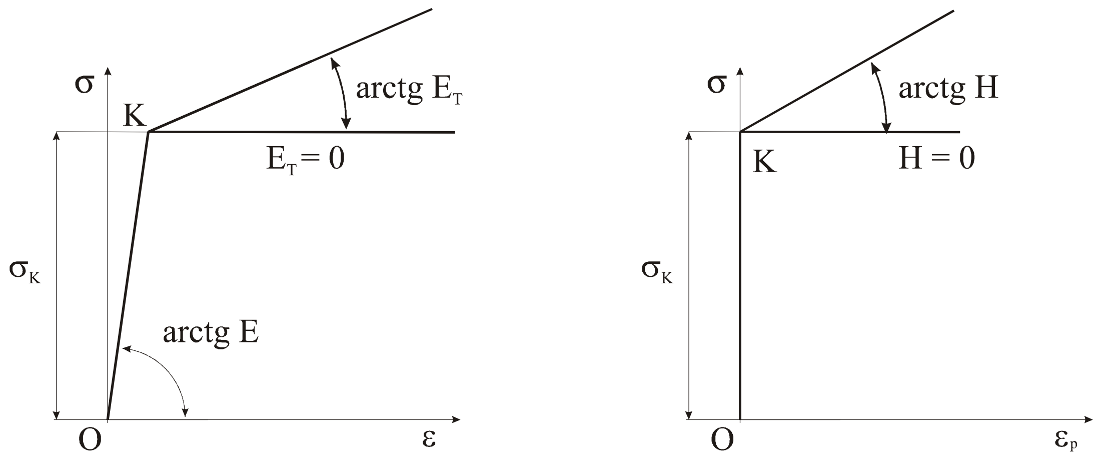
$$H = \frac{EE_T}{E - E_T} \tag{9}$$

Niektoré dôležité aspekty opísaného modelu možno zhrnúť takto:

- Existuje *elastická oblasť*, t.j. určitý rozsah napätia, v ktorej sa materiál správa ako čisto lineárne elastický, bez vzniku plastickej deformácie. Hranicou tejto oblasti je medza sklzu.
- Ak napätie dosiahne medzu sklzu a zaťaženie ďalej narastá vzniká tzv. *plastické tečenie materiálu* spojené so vznikom trvalej plastickej deformácie.
- So vznikom plastickej deformácie je spojená aj zmena veľkosti medze sklzu. Tento jav sa nazýva *spevňovanie materiálu*.

S uvedenými vlastnosťami kovových materiálov sa v určitej viac alebo menej modifikovanej forme môžme stretnúť aj pri iných materiáloch, ako je napr. betón, kameň, pôda (rôzne druhy zemín) a niekoľko ďalších. Hovoríme, pravda, len o fenomenologických vlastnostiach, pretože mikroskopický mechanizmis, ktorý ich vyvoláva, môže byť úplne rozdielny. Takisto sú rozdielne aj experimentálne postupy pri zisťovaní a overovaní vlastností týchto materiálov.

Jednoosové charakteristiky materiálu tvoria základ aj pre zadávanie vlastností materiálu pri riešení pružne-plastických úloh všeobecných telies namáhaných viacosovou napätosťou. Často sa aj takto charakterizované vlastnosti materiálu v teórii platicity i v programoch MKP ďalej zjednodušujú. Napr. sa predpokladá ideálne pružne plastický materiál ($E_T = 0$), alebo sa skutočná závislosť σ - ε aproximuje bilineárnou čiarou (obr. 10.3).



Obr. 10.3 *Bilineárne spevňovanie a ideálne plastický materiál*

I keď takéto aproximácie vyzerajú na prvý pohľad z hľadiska presnosti riešenia dosť nedôveryhodne, ich využívanie, napr. pri bežnej oceli, je veľmi časté a pri mnohých praktických úlohách oprávnené. Treba si totiž uvedomiť, že pokiaľ riešime bežnú pružne-plastickú úlohu, plastické tečenie materálu sa objavuje len v miestach lokálnej koncentrácie napätia. Body so špičkami napätia sa splastizujú a odovzdávajú prípadný ďalší prírastok zaťaženia susedným elasticky zaťaženým "tuhým" častiam a teda, aj keď sa zavedie ideálne plastický materiál, plastické deformácie sú malé a bilineárne spevnenie v okolí medze sklzu môže celkom dobre vystihovať realitu. Pochopiteľne v prípade kombinácie geometrickej a fyzikálnej nelinearity, pri analýze telies vyrobených zo špeciálnych materiálov alebo pri visko-plastických úlohách máme k dispozícii aj presnejšie materiálové modely (pozrite napr. ponuku materiálových modelov v programe ANSYS).

Funkcia plasticity a kritérium plasticity

Uvažujme teleso zaťažené jednoosovým napätím σ, pričom materiál telesa má aktuálnu medzu sklzu $\bar{\sigma}_K$ v ťahu a tlaku rovnakú. Potom pre *elastickú oblasť* zaťažovania častice (materiálového bodu) telesa platí

$$f = |\sigma| - \bar{\sigma}_K < 0 \qquad \rightarrow \qquad |\sigma| < \bar{\sigma}_K \tag{10}$$

Takto zavedená funkcia f sa nazýva *funkcia plasticity*. Ak absolútna hodnota napätia σ dosiahne hodnotu $\bar{\sigma}_K$, a teda funkcia f nulovú hodnotu, zaťaženie materiálovej častice dosiahlo hranicu plastickej oblasti. O tom, čo sa s časticou odohrá pri ďalšej zmene napätia, rozhoduje tzv. *kritérium (podmienka) plasticity,* ktoré možno zapísať v tvare

$$\text{Ak} \quad f(\sigma,\bar{\sigma}_K) = |\sigma| - \bar{\sigma}_K = 0 \quad \text{a} \quad \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p \neq 0 \;\rightarrow\; \text{ide o plastické zaťažovanie} \\ \dot{\varepsilon}^p = 0 \;\rightarrow\; \text{ide o elastické odľahčenie} \end{array} \tag{11}$$

kde $\dot{\varepsilon}^p$ je rýchlosť jednoosovej plastickej deformácie

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^p(\mathbf{X},t) \quad \rightarrow \quad d\varepsilon^p = \dot{\varepsilon}^p dt \tag{12}$$

a $\mathbf{X}$ je polohový vektor častice v začiatočnej (nedeformovanej) konfigurácii.

V súvislosti s kritériom plasticity (11) poznamenávame, že napätie σ nemôže dosiahnúť väčšiu hodnotu ako je aktuálna medza sklzu $\bar{\sigma}_K$ a všetky prípustné hodnoty napätia musia spĺňať podmienku

$$f(\sigma,\bar{\sigma}_K) \leq 0 \tag{13}$$

<u>Zákon plastického tečenia. Podmienky plastického zaťaženia a elastického odľahčenia. Spevňovanie materiálu</u>

Pre jednoosovú deformáciu *zákon plastického tečenia* materiálu možno formálne zapísať v tvare

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\, sign(\sigma) \tag{14}$$

kde (zatiaľ neznámy) skalár $\dot{\lambda} \geq 0$ sa nazýva *plastický násobok* a funkcia *sign* je rovná +1, ak je $\sigma \geq 0$ a -1, ak je $\sigma < 0$. Kladné (ťahové) napätie takto vyvolá kladnú jednoosovú deformáciu (natiahnutie) a záporné (tlakové) napätie zápornú deformáciu (stlačenie). Plastický násobok spĺňa tzv. *podmienku komplementarity*

$$\dot{\lambda} f = 0 \tag{15}$$

ktorá spolu s podmienkou plasticity (11) a zákonom plastického tečenia (14) zaručuje, že v elastickej oblasti je rýchlosť plastickej deformácie nulová

$$f < 0 \;\rightarrow\; \dot{\lambda} = 0 \;\rightarrow\; \dot{\varepsilon}^p = 0 \tag{16}$$

a že plastické tečenie môže vzniknúť len vtedy, keď sa absolútna hodnota napätia stotožní s aktuálnou medzou sklzu

$$|\sigma| = \bar{\sigma}_K \;\rightarrow\; f = 0 \;\rightarrow\; \dot{\lambda} \geq 0 \tag{17}$$

Z uvedených vzťahov možno stanoviť aj tzv. *zaťažovacie/odľahčovacie podmienky* pružne-plastického modelu

$$f \leq 0, \qquad \dot{\lambda} \geq 0, \qquad \dot{\lambda} f = 0 \tag{18}$$

Z prvej vyplýva, že napätie musí ležať na alebo pod hranicou medze sklzu, druhá zabezpečuje, že plastický násobok nemôže byť záporný a z poslednej vyplýva, že pri plastickom zaťažovaní je napätie rovné medzi sklzu, pričom $\dot{\lambda} > 0$ a tiež, že $\dot{\lambda} = 0$ pri elastickom odľahčení.

Ako sme už uviedli, experimentálne merania potvrdzujú, že plastické tečenie materiálu je spojené so zmenou aktuálnej medze sklzu $\bar{\sigma}_K$. Tento jav je označovaný ako *spevňovanie* a pri jednoosom modeli sa tzv. *zákon plastického spevňovania* zohľadňuje jednoducho funkciou

$$\bar{\sigma}_K = \bar{\sigma}_K(\bar{\varepsilon}^p) \tag{19}$$

kde

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \left|\dot{\varepsilon}^p\right| dt \tag{20}$$

sa nazýva *akumulovaná plastická deformácia*, do hodnoty ktorej, ako vidieť, prispieva rovnako prírastok ťahovej i tlakovej plastickej deformácie. Z definícií $\bar{\varepsilon}_p$ a λ vyplýva

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \left|\dot{\varepsilon}^p\right| = \dot{\lambda} \tag{21}$$

Podmienka konzistencie. Určenie plastického násobku.

Pri plastickom tečení materiálu, kedy absolútna hodnota napätia sa stále rovná aktuálnej medzi sklzu ($\sigma = \bar{\sigma}_K$), je podľa (11) funkcia plasticity konštantná ($f = 0$), z čoho vyplýva tzv. *podmienka konzistencie*

$$\dot{f} = 0 \qquad \rightarrow \qquad df = \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \tag{22}$$

a podľa (11) a (6) tiež dostávame

$$\dot{f} = sign(\sigma)\dot{\sigma} - H(\bar{\varepsilon}^p)\dot{\varepsilon}^p = 0 \tag{23}$$

Plastický násobok možno teraz zo vzťahov (23), (21) a z Hookeovho zákona (v rýchlostnom tvare)

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P) \tag{24}$$

vyjadriť pomocou materiálových parametrov a rýchlosti (resp. prírastku) celkovej deformácie

$$\dot{\lambda} = \frac{E}{H+E} sign(\sigma)\dot{\varepsilon} = \frac{E}{H+E}|\dot{\varepsilon}| \tag{25}$$

2. Všeobecný pružne-plastický konštitutívny model

Opísaný jednoosový model ťažného kovového materiálu obsahuje všetky základné charakteristiky všeobecného pružne plastického materiálového modelu vhodného pre trojrozmernú deformačnú a napäťovú analýzu telesa z poddajného materiálu. Pravda, rovnice a vzťahy platné pre takýto model sú komplikovanejšie, pretože jednoosovú deformáciu a jednoosové napätie musíme nahradiť tenzormi všeobecnej priestorovej deformácie a napätosti. Analogicky s jednoosovým modelom sa predpokladá, že tenzor celkovej deformácie $\boldsymbol{\varepsilon}$ možno rozložiť na elastickú a plastickú časť

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{26}$$

a pretože pri pružne plastickom zaťažovaní je vzťah medzi zaťažením (napätím) a celkovou deformáciou nelineárny, a závisí aj od zaťažovacej histórie (na rozdiel od nelinearity hyperelastického materiálu), stretávame sa s uvedenými tenzormi hlavne v diferenciálnom (pri numerickom riešení diferenčnom) prírastkovom tvare

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \qquad \rightarrow \qquad d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{27}$$

Tieto hodnoty sa vyjadrujú pre aktuálny stav určovaný pseudočasom *t* (uvažujeme kvázi statickú úlohu), ktorý je formálnou mierou zaťažovacieho procesu. Celkové hodnoty deformácií sa v priebehu zaťažovacieho procesu určujú sčítávaním (integrovaním) meniacich sa prírastkov. Napätie sa vyjadruje na východzej (nedeformovanej) konfigurácii a vzhľadom na predpoklad malých deformácii ho možno považovať za Cauchyho napätie. Pretože uvažujeme materiál, ktorého pružné vlastnosti sú lineárne a izotropné, pre tenzor napätia platí zovšeobecnený Hookeov zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e + K\varepsilon_v^e \boldsymbol{I} \tag{28}$$

kde je uvedený aj jeho, v teórii plasticity často a výhodne využívaný, rozklad na deviatorickú a objemovú časť. V (28) $\mathbf{D}^e$ je štandardný izotropný tenzor pružného materiálu, *G* je modul pružnosti v šmyku, *K* je objemový modul materiálu, $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$ je deviatorická časť tenzora pružnej deformácie, $\varepsilon_v^e = tr|\boldsymbol{\varepsilon}^e|$ je objemová pružná deformácia a $\boldsymbol{I}$ je jednotkový tenzor druhého rádu.

Kritérium plasticity, plastický potenciál, zákon plastického tečenia a zákon spevňovania

Jednoosová napätosť, ktorou sme sa zoberali v predchádzajúcej časti, je plne charakterizovaná veľkosťou a zmyslom (hlavného) napätia σ. Ak absolútna hodnota tohoto napätia dosiahne veľkosť aktuálnej medze sklzu materiálu $\bar{\sigma}_k$, hovoríme o splnení kritéria (podmienky) plasticity (plastického tečenia) takto zaťaženej častice (bodu) telesa. Podľa (11) sa dá jednoducho vyjadriť v tvare

$$f\left(\sigma, \bar{\sigma}_K\right) = 0 \tag{29}$$

Tento tvar kritéria plasticity možno formálne zovšeobecniť aj pre viacrozmernú napätosť

$$f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{a})=0 \tag{30}$$

kde ale skalárna funkcia plasticity je teraz funkciou tenzora napätia $\boldsymbol{\sigma}$ a prípadne jednej, dvoch alebo aj celej sady funkcií $\mathbf{a}$, riadiacich spevňovanie materiálu.

Pri formulácii viacrozmerných plastických modelov je výhodné definovať zákon plastického tečenia, a podľa možnosti aj zákon spevňovania materiálu, pomocou vhodného *plastického potenciálu*

$$g=g(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{a}) \tag{31}$$

Pre mnohé materiály (najmä kovové) možno ako plastický potenciál využiť funkciu plasticity ako najjednoduchší prípad plastického potenciálu

$$g(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{a})=f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{a}) \tag{32}$$

a v ďalšom sa budeme zaoberať len takýmito modelmi; nazývajú sa *asociatívne* (plastický potenciál je stotožnený s funkciou plasticity, ktorá sa v takomto prípade často nazýva aj *funkciou plastického zaťažovania*). Z plastického potenciálu sa vyjadruje *zákon plastického tečenia* v tvare

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\dot{\lambda}\mathbf{f} \tag{33}$$

kde deväť členov tenzora

$$\mathbf{f}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{34}$$

(vzhľadom na jeho fyzikálny význam často nazývaného *vektorom tečenia*) dostaneme postupným derivovaním plastického potenciálu podľa zložiek napätia. Ako vidieť z (33), všetky členy tenzora rýchlosti plastickej deformácie sú úmerné plastickému násobku, ktorý je nenulový len v prípade, keď došlo k plastickému tečeniu. Plastický násobok $\dot{\lambda}$ a funkcia plasticity (30) opäť určujú podmienky plastického zaťažovania resp. odľahčovania, ktoré majú nezmenený tvar i význam podľa (18).

Problém spevňovania materiálu možno všeobecne vyjadriť pomocou jednej, dvoch alebo aj celej sady *vnútorných prememných* $\boldsymbol{\alpha}$, pre ktoré platí *zákon spevňovania*

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\lambda}\mathbf{h} \tag{35}$$

kde pre

$$\mathbf{h}=-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \tag{36}$$

tzv. *zobecnený modul spevňovania*, treba určiť aj závislosť $\mathbf{a}$ na vnútorných premenných $\boldsymbol{\alpha}$, ktoré riadia vlastný spevňovací proces počas plastického tečenia materiálu.

<u>*Všeobecná termodynamická formulácia spevňovacích funkcií*</u>

Ak predpokladáme izotermický deformačný proces bez výmeny tepla možno *Helmholzovu voľnú energiu* na jednotku hmotnosti

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{\alpha})$$

považovať za funkciu celkovej deformácie, plastickej deformácie a sady vnútorných premenných $\boldsymbol{\alpha}$ charakterizujúcich spevňovanie materiálu. Túto energiu možno rozdeliť na elastickú časť ψ^e od elastickej deformácie a časť ψ^p spotrebovanú na plastickú deformáciu a spevnenie materiálu

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,\boldsymbol{\alpha})=\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)+\psi^p(\boldsymbol{\alpha})=\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^p)+\psi^p(\boldsymbol{\alpha}) \tag{37}$$

Pre takto definovanú voľnú energiu má Clausius-Duhemova nerovnosť tvar [Lit1]

$$(\boldsymbol{\sigma}-\rho\frac{\partial\psi^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}):\boldsymbol{\varepsilon}^e+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^p-\mathbf{a}*\dot{\boldsymbol{\alpha}}\geq 0 \tag{38}$$

kde

$$\mathbf{a} = \rho \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \tag{39}$$

je tzv. *spevňovacia termodynamická sila*, ρ je hustota materiálu a znak $*$ symbolizuje príslušný súčin medzi jednotlivými pármi $\mathbf{a}$ a $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. Rovnosť v (38) platí len pre reverzibilý (elastický) proces, z čoho vyplýva

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{40}$$

a zvyšné dva členy tvoria tzv. *funkciu plastickej disipácie*

$$\gamma^p = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{a} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{41}$$

<u>*Určenie plastického násobku a pružne plastického tangenciálneho modulu*</u>

Pri plastickom tečení materiálu $\dot{\lambda} \neq 0$ a platí podmienka konzistencie (22)

$$\dot{f} = 0 \tag{42}$$

Derivovaním funkcie plasticity (30) podľa času dostávame

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} * \dot{\mathbf{a}} = 0 \tag{43}$$

Využitím vzťahov pre rýchlosť zmeny napätia $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{D}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{D}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{D}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{f}) \tag{44}$$

a rýchlosti spevňovacej termodynamickej sily

$$\dot{\mathbf{a}} = \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \dot{\lambda} \mathbf{h} \tag{45}$$

sa vzťah (43) zmení na

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} * \rho \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \mathbf{h} = 0 \tag{46}$$

a z neho plastický násobok je

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \mathbf{f} - (\partial f / \partial \mathbf{A}) * \rho (\partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2) * \mathbf{h}} \tag{47}$$

Dosadením tohto výsledku do (44) a menšou úpravou dostaneme rýchlosť zmeny napätia (alebo po vynásobení s *dt* diferenciálny prírastok $d\boldsymbol{\sigma}$) v závislosti od rýchlosti celkovej deformácie

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{48}$$

kde pre tzv. *pružne plastický tangenciálny materiálový* modul platí

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e : \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{D}^e : \mathbf{f})}{\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \mathbf{f} - (\partial f / \partial \mathbf{A}) * \rho (\partial^2 \psi^p / \partial \boldsymbol{\alpha}^2) * \mathbf{h}} \tag{49}$$

Podstata použitej úpravy spočívale v tom, že pre symetrický tenzor $\mathbf{D}^e$ platí

$$\mathbf{f} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^e : \mathbf{f} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{50}$$

Z uvedeného vyplýva, že pre formuláciu konkrétneho pružne plastického materiálového modelu treba vykonať tieto základné práce

- určiť, alebo si zvoliť, vhodné kritérium (podmienku) plasticity (30) a vnútorné premenné riadiace spevňovanie materiálu
- definovať plastický potenciál; v prípade asociovaného modelu (32) sa využije funkcia plasticity obsiahnutá

v podmienke plasticity

- určiť vektor tečenia (34) a určiť, alebo si zvoliť, zákon spevňovania (35)
- určiť tangenciálny materiálový model (49) pre možnosť určovania prírastku napätia z prírastku celkovej deformácie vyvolanej prírastkami zaťaženia (48)
- pre potreby numerického riešenia vyriešiť problém dostatočne presnej integrácie diferenciálneho vzťahu (48) vzhľadom na konečné prírastky deformácie $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$

3. Napäťové invarianty

Napätie vo všeobecnom bode zaťaženého telesa možno rozložiť na tzv. *stredné* (*hydrostatické*) normálové napätie $\sigma_m \boldsymbol{I}$ a deviatorické napätie $\mathbf{s}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \sigma_m \boldsymbol{I} + \mathbf{s} \qquad \textit{alebo} \qquad \sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij} \tag{51}$$

kde

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \tag{52}$$

a

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}\right) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \frac{1}{3}\left(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}\right) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \frac{1}{3}\left(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}\right) \end{bmatrix} \tag{53}$$

Tento rozklad sa pomerne často využíva, pretože plastické tečenie niektorých dôležitých materiálov nezávisí od hydrostatického napätia a pri formulácii materiálového modelu sa pracuje s deviatorickým napätím.

V Cauchyho pravidle pre vyjadrovanie napätia v ľubovoľnej rezovej rovine diferenciálneho šesťstenu [D3] požadujme, aby v rovine určenej vektorom vonkajšej normály $\mathbf{n}$ pôsobilo *len normálové* napätie σ. Potom platí

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{54}$$

čo je štandardný problém vlastných čísiel: Pre danú maticu [$\boldsymbol{\sigma}$] treba nájsť (vlastné) čísla σ a (vlastné) vektory $\mathbf{n}$, pre ktoré rovnice (54) platia. Je to vlastne sústava homogénnych rovníc

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\boldsymbol{I})\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{55}$$

ktorá má nenulové riešenie len vtedy, keď determinant matice jej koeficientov sa rovná nule

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\boldsymbol{I}) = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \tag{56}$$

Vyjadrením determinantu (pri zohľadnení symetrie matice) dostaneme pre určenie σ kubickú rovnicu

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{57}$$

kde

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \\ I_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \end{aligned} \tag{58}$$

Riešením tejto rovnice dostaneme tri korene $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, tzv. *hlavné napätia*, ktoré pre danú napätosť v bode telesa (daný tenzor napätia) majú jednoznačné hodnoty. Sú to napäťové *invarianty*, nezávislé na zmene súradnicového systému. Je zrejmé, že aj koeficienty I_i rovnice (57) sú invarianty, lebo pri ľubovoľnej orientácii súradnicového systému musíme z rovnice dostať tie isté hlavné napätia. Nazývajú sa *hlavné invarianty tenzora napätia*. Možno ich prehľadne zapísať aj pomocou hlavných napätí

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{59}$$

Dosadením hlavných napätí do (54) možno určiť vlastné vektory, tzv. *hlavné smery* napätia a potvrdiť si vedomosti zo základov pružnosti, že hlavné napätia pôsobia v troch navzájom kolmých rovinách.

Z dôvodov, ktoré sme uviedli, sú dôležité aj invarianty deviatorického napätia. Rovnakým postupom a z formálne rovnakých vzťahov ako pri napätí $\boldsymbol{\sigma}$ dostaneme pre $\mathbf{s}$ *charakteristickú rovnicu* analogickú s (57)

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \tag{60}$$

kde, podľa dohody zaručujúcej kladnú hodnotu J_2, sa zmenilo znamienko pri J_2, čo treba zohľadniť pri prepisovaní vzorcov pre J_2 z (58) a (59). Pretože sa pri zmene súradnicového systému stredné napätie nemení, hlavné smery napätia sú totožné s hlavnými smermi deviatorického napätia a platí

$$s_i = \sigma_i - \sigma_m \tag{61}$$

Pre *hlavné invarianty deviatorického napätia* platia analogické vzťahy s (58) a (59). Pre najdôležitejší hlavný invariant deviatorického napätia sme pripojili aj niektoré ďalšie často používané formy zápisu

$$\begin{aligned} J_1 &= s_1 + s_2 + s_3 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \\ J_2 &= -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = \tfrac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} = \tfrac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \\ &= \tfrac{1}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ J_3 &= \mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2 \mathrm{s}_3 \end{aligned} \tag{62}$$

Napäťové invarianty zohrávajú dôležitú úlohu pri tvorbe podmienok plasticity a formulácii plastických potenciálov.

Literatúra

[Lit1] Neto E.A.S. - Perić D. - Owen D.R.J.: Computational Methods for Plasticity. Wiley, 2008